Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT.

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

72. BAND, 1. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 11. SEPTEMBER 1959)

QA1
M88
v.72-74

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1959

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp, E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,

R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B

E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,

F. K. Schmidt Heidelberg, Mathematisches Institut,

H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21 b.

Springer-Verlag OHG — Berlin-Wilmersdorf, Heidelberger Platz 3 — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

72. Band — **Inhalt** — 1. Heft

Seite

Ostrowski, A., Über Produkte Hermitescher Matrizen und Büschel Hermitescher Formen 1

Perron, O., Über lineare Differenzengleichungen und eine Anwendung auf lineare Differentialgleichungen mit Polynomkoeffizienten 16

Brauer, R., Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung. II 25

Walsh, J. L., Note on approximation by bounded analytic functions (Problem α) . 47

Loewner, C., A theorem on the partial order derived from a certain transformation semigroup 53

Salié, H., Zum Wertevorrat der Dedekindschen Summen 61

Hopf, E., Zur Kennzeichnung der Euklidischen Norm 76

Synge, J. L., A theory of elasticity in general relativity 82

Kuratowski, K., Un critère de coupure de l'espace euclidien par un sous-ensemble arbitraire 88

Hille, E., An Application of Prüfer's Method to a Singular Boundary Value Problem 95

Ostrowski, A.
Math. Zeitschr. 72, 1—15 (1959)

Über Produkte Hermitescher Matrizen und Büschel Hermitescher Formen

Dem Andenken an Leon Lichtenstein gewidmet
(16. 5. 1878 bis 21. 8. 1933)

Von

Alexander Ostrowski

1. In einer kürzlich veröffentlichten Arbeit [9] habe ich unter anderem bewiesen, daß wenn eine Hermitesche Matrix H der Ordnung n mit einer positiv definiten Matrix D derselben Ordnung multipliziert wird, ihre Signatur dabei unverändert bleibt, so daß also DH genau so viele positive Eigenwerte hat wie H und dasselbe auch für negative Eigenwerte gilt. Es wurde, etwas schärfer, bewiesen, daß wenn D eine definite Matrix ist mit p als kleinstem und P als größtem Eigenwert, die Eigenwerte von DH sich aus denen von H durch Multiplikation mit gewissen Faktoren erhalten lassen, die zwischen p und P liegen[1]).

Es liegt nun nahe zu erwarten, daß wenn die Matrix D zwar nicht definit ist, also nicht lauter Eigenwerte gleichen Vorzeichens hat, dafür aber nur „wenig Eigenwerte abweichenden Vorzeichens" aufweist, dann vom obigen Satz zumindest eine gewisse Annäherung an die Tatsache der Realität sämtlicher Fundamentalwurzeln von DH gerettet werden könnte. Und dies ist in der Tat der Fall. Wir wollen allgemein für eine Hermitesche Matrix A mit π_A die Anzahl der positiven und mit ν_A die Anzahl der negativen Eigenwerte von A sowie für eine beliebige Matrix B mit K_B die Anzahl der nicht reellen Fundamentalwurzeln von B bezeichnen. Dann gilt der

Satz 1. *Sind A, B zwei Hermitesche Matrizen gleicher Ordnung, so ist K_{AB} gerade und es gilt*

$$K_{AB} \leqq 2 \operatorname{Min}(\pi_A, \nu_A, \pi_B, \nu_B). \tag{1}$$

2. Die Aussage des Satzes 1 liefert natürlich auch eine *untere* Schranke für die *Anzahl der reellen Fundamentalwurzeln* von AB. Wird diese Aussage in der entsprechenden Weise umgeschrieben, so läßt sie sich, wenn eine der Matrizen A, B regulär ist, insofern verschärfen, als man für die Anzahlen der positiven und der negativen Fundamentalwurzeln von AB einzeln untere Schranken angeben kann[2]).

[1]) Durch eine freundliche Mitteilung von Olga Taussky-Todd bin ich nachträglich darauf aufmerksam gemacht worden, daß in der kürzlich erschienenen Arbeit von Amir-Moéz [1] *im Spezialfall, daß auch H eine definite Form ist*, der obige Sachverhalt als eine Folgerung aus recht allgemeinen und sehr scharfen Abschätzungen hergeleitet wird.

[2]) Es sei daran erinnert, daß die Eigenwerte von AB und BA die gleichen sind.

Um diese Formulierungen angeben zu können, erinnern wir daran, daß unter der *Signatur* einer Hermiteschen Form A die Differenz $\sigma_A = \pi_A - \nu_A$ verstanden wird. Wir bezeichnen ferner den *Rang* der Matrix A mit r_A und mit δ_A den „*Defekt*" von A, d.h. die Differenz $n - r_A$[3]). Dann ergibt sich aus dem Satz 1 als eine untere Schranke für die Anzahl der reellen Fundamentalwurzeln von AB

$$\begin{aligned}&\operatorname{Max}(n-2\pi_A,\, n-2\pi_B,\, n-2\nu_A,\, n-2\nu_B)\\ &\quad=\operatorname{Max}(\delta_A+\nu_A-\pi_A,\ \delta_B+\nu_B-\pi_B,\ \delta_A+\pi_A-\nu_A,\ \delta_B+\pi_B-\nu_B)\\ &\quad=\operatorname{Max}\left(|\sigma_A|+\delta_A,\ |\sigma_B|+\delta_B\right).\end{aligned}$$

Bezeichnen wir nun allgemein die Gesamtanzahl der reellen Eigenwerte einer Matrix A mit R_A, so ist der Satz 1 äquivalent mit

Satz 1°. *Sind A, B zwei Hermitesche Matrizen gleicher Ordnung, so gilt*

$$R_{AB} \geqq \operatorname{Max}\left(|\sigma_A|+\delta_A,\ |\sigma_B|+\delta_B\right), \tag{2}$$

wobei die Differenz der beiden Seiten von (2) *gerade ist.*

3. Wir bezeichnen ferner die Gesamtanzahl der positiven Eigenwerte einer Matrix A allgemein mit R_A^+ und analog die Anzahl ihrer negativen Eigenwerte mit R_A^-.

Als Pendant zum Satz 1° beweisen wir in Nr. 21 den

Satz 2. *Sind A, B zwei Hermitesche Matrizen gleicher Ordnung und ist A regulär, so gilt*

$$R_{AB}^+ \geqq \tfrac{1}{2}|\sigma_A+\sigma_B| - \tfrac{1}{2}\delta_B, \tag{3}$$

$$R_{AB}^- \geqq \tfrac{1}{2}|\sigma_A-\sigma_B| - \tfrac{1}{2}\delta_B. \tag{4}$$

Sind die Matrizen A, B *beide regulär*, so ergeben sich im Satze 2 die beiden unteren Schranken

$$\tfrac{1}{2}|\sigma_A+\sigma_B|, \qquad \tfrac{1}{2}|\sigma_A-\sigma_B|,$$

deren Summe in diesem Falle gerade gleich dem Ausdruck (2) ist.

4. Lassen wir im Satze 2 die Voraussetzung fallen, daß eine der Matrizen A, B regulär ist, so lassen sich an Stelle der Relationen (3) und (4) geeignet abgeschwächte Relationen angeben.

Wir bezeichnen für eine Matrix A mit $\overline{R}_A^+$ die Anzahl der *nicht negativen* reellen Eigenwerte von A und analog mit $\overline{R}_A^-$ die Anzahl der *nicht positiven* reellen Eigenwerte von A. Dann werden wir in Nr. 23 beweisen:

Satz 3. *Sind A, B zwei Hermitesche Matrizen gleicher Ordnung, so gilt*

$$\overline{R}_{AB}^+ \geqq \tfrac{1}{2}|\sigma_A+\sigma_B| + \tfrac{1}{2}(\delta_A+\delta_B), \tag{5}$$

$$\overline{R}_{AB}^- \geqq \tfrac{1}{2}|\sigma_A-\sigma_B| + \tfrac{1}{2}(\delta_A+\delta_B). \tag{6}$$

[3]) Bekanntlich ist bei einer Hermiteschen Matrix der Defekt gleich der Mehrfachheit der Null als Fundamentalwurzel, während sonst der Defekt einer quadratischen Matrix gleich der Anzahl der im Nullpunkt verschwindenden Elementarteiler und damit der Anzahl der zum Eigenwert Null gehörenden linear unabhängigen Eigenvektoren ist.

5. Der Satz 1° hängt eng zusammen mit einem Satz, der in der Inauguraldissertation von FELIX KLEIN 1868 ausgesprochen und bewiesen wurde ([5], p. 32). Der Kleinsche Satz bezieht sich, in unseren Bezeichnungen und unter der heute fast selbstverständlichen Verallgemeinerung auf Hermitesche statt reelle symmetrische Matrizen (vgl. [10], Fußnote pp. 47—49), auf Büschel Hermitescher Matrizen n-ter Ordnung:

$$M_\lambda = B - \lambda C \tag{7}$$

und die zugehörige Gleichung in λ:

$$|B - \lambda C| = 0. \tag{8}$$

Und zwar lautet er (der Beweis ergibt sich mit in Nr. 18):

Satz 4 (von FELIX KLEIN). *Sind B und C zwei Hermitesche Matrizen n-ter Ordnung und ist die Matrix C regulär, so hat* (8) *wenigstens $|\sigma_C|$ reelle Wurzeln. Allgemeiner hat die Determinante $|B - \lambda C|$ wenigstens $|\sigma_C|$ reelle Elementarteiler ungerader Ordnung*[4]).

Wir werden darüber hinaus in Nr. 18 beweisen:

Zusatz zum Satz 4. *Unter den Voraussetzungen des F. Kleinschen Satzes sind die Differenzen zwischen den Anzahlen der reellen Wurzeln von* (8) *und der reellen Elementarteiler ungerader Ordnung von $B - \lambda C$ einerseits und $|\sigma_C|$ andererseits gerade.*

6. Setzen wir $C^{-1} = A$ im Satz 4 und beachten, daß für reguläre C sicher $\sigma_A = \sigma_C$ ist, so folgt aus

$$|B - \lambda C| = |C|\,|AB - \lambda E|, \tag{9}$$

daß

$$R_{AB} \geqq |\sigma_A|$$

ist, wobei A eine beliebige reguläre Hermitesche Matrix n-ter Ordnung und $R_{AB} - |\sigma_A|$ gerade ist. Daraus folgt weiter nach Definition von K_{AB} wegen $\sigma_A = 2\pi_A - n$:

$$K_{AB} \leqq n - |2\pi_A - n|.$$

Da aber der Ausdruck rechts $\leqq 2\pi_A$ ist, folgt

$$K_{AB} \leqq 2\pi_A, \tag{10}$$

wobei $2\pi_A - K_{AB}$ gerade ist.

Von dieser Relation ausgehend, beweisen wir in Nr. 22 den Satz 1.

Es gilt ferner, analog zum Satz 4, der in Nr. 18 zu beweisende

[4]) Eine mit einem Teil der im Text angegebenen Kleinsche Aussage in den meisten Fällen äquivalente Formulierung findet sich bereits 1853 bei SYLVESTER ([11], p. 635), allerdings ohne Beweis und nur mit einer Beweisandeutung, die sich, wie uns scheint, ohne Hinzufügung weiterer Gedanken nicht ausführen läßt. Bei der bekannten Arbeitsweise des großen englischen Mathematikers muß daher wohl eher angenommen werden, daß er die fragliche Formulierung durch „unvollständige Induktion" gewonnen hat.

Satz 4°. *Unter den Voraussetzungen von Satz 4 hat* (8) *wenigstens* $|\sigma_B|$ *reelle Wurzeln. Allgemeiner ist* $|\sigma_B|$ *höchstens gleich der Summe* S *der Anzahl der Elementarteiler ungerader Ordnung von* (7), *die reelle von* 0 *verschiedene Nullstellen haben, und der Anzahl der Elementarteiler gerader Ordnung von* (7), *die im Ursprung verschwinden. Dabei ist die Differenz* $S-|\sigma_B|$ *gerade.*

7. Die Sätze 4 und 4° lassen sich so umschreiben, daß darin statt σ die Größen π, ν vorkommen. So erhält man die Formulierung:

Satz 5. *Unter den Voraussetzungen von Satz 4 liegen* π_C, ν_C *zwischen den Grenzen*

$$k+\sum\left[\frac{e}{2}\right], \qquad k+\sum\left[\frac{e+1}{2}\right] \tag{11}$$

und π_B, ν_B *zwischen den Grenzen*

$$k+\sum\left[\frac{e'}{2}\right]+\sum\left[\frac{e_0-1}{2}\right], \qquad k+\sum\left[\frac{e'+1}{2}\right]+\sum\left[\frac{e_0}{2}\right], \tag{12}$$

wo k *die halbe Gesamtanzahl der nicht reellen Wurzeln von* (8) *ist, die* e *die Exponenten sämtlicher reeller Elementarteiler von* (7), *die* e' *die Exponenten sämtlicher reeller nicht im Ursprung verschwindender Elementarteiler und die* e_0 *die Exponenten sämtlicher im Ursprung verschwindender Elementarteiler durchlaufen.*

Wir leiten in der Nr. 20 als den Satz 5° eine etwas verallgemeinerte Fassung des Satzes 5 her.

Die unteren Schranken des Satzes 5 sind von A. LOEWY ([6], [7], vgl. auch [2]) aufgestellt worden, wobei aber zu bemerken ist, daß die Gültigkeit der oberen Schranken dieses Satzes aus derjenigen der unteren Schranken sich direkt vermöge der Relationen

$$n=\pi_C+\nu_C, \qquad n=\pi_B+\nu_B+\delta_B$$

herleiten läßt.

8. Wird unter Benutzung von (9) der Satz 5 auf das Produkt AB übertragen, so ergibt sich sofort die folgende Formulierung:

Satz 6. *Sind* A, B *zwei Hermitesche Matrizen, von denen wenigstens eine regulär ist, so gelten die Relationen*

$$\begin{cases} \operatorname{Max}(\pi_B, \nu_B) \leqq k+\sum\left[\frac{e'+1}{2}\right]+\sum\left[\frac{e_0}{2}\right], \\ \operatorname{Min}(\pi_B, \nu_B) \geqq k+\sum\left[\frac{e'}{2}\right]+\sum\left[\frac{e_0-1}{2}\right]; \end{cases} \tag{13a}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Max}(\pi_A, \nu_A) \leqq k+\sum\left[\frac{e'+1}{2}\right]+\sum\left[\frac{e_0+1}{2}\right], \\ \operatorname{Min}(\pi_A, \nu_A) \geqq k+\sum\left[\frac{e'}{2}\right]+\sum\left[\frac{e_0}{2}\right]. \end{cases} \tag{13b}$$

Dabei ist $2k=K$ *die* (gerade) *Gesamtanzahl nicht reeller Eigenwerte von* AB, *während* e' *die Exponenten aller reellen Elementarteiler von* AB *durchläuft, die im Ursprung nicht verschwinden, und* e_0 *die Exponenten der im Ursprung verschwindenden Elementarteiler.*

9. Der Übergang von den die Signatur enthaltenden Ungleichungen der Sätze 4 und 4° zu den π und ν enthaltenden Relationen des Satzes 5 hat natürlich den Vorteil, daß in den letzteren *sämtliche* Elementarteiler auftreten. Andererseits bedeutet dies aber einen *Rückschritt,* da dadurch die Möglichkeit einer wichtigen Verallgemeinerung verloren geht.

Wir wollen allgemein setzen:

$$\sigma(\lambda) = \sigma_{M_\lambda}, \quad \pi(\lambda) = \pi_{M_\lambda}, \quad \nu(\lambda) = \nu_{M_\lambda}. \tag{14}$$

Mit $R(\lambda)$ bezeichnen wir die Gesamtanzahl der reellen Wurzeln der Gl. (8), die $\leqq \lambda$ sind (natürlich mehrfache mehrfach gezählt). Ferner soll $R^*(\lambda)$ die Anzahl der reellen Elementarteiler ungerader Ordnung von (7) bedeuten, deren Nullstellen $\leqq \lambda$ sind. Dann läßt sich der Satz 4 dahin auffassen, daß die Zuwächse $\Delta R^*(\lambda)$, $\Delta R(\lambda)$ für das Intervall $(-\infty, \infty)$ wenigstens gleich den absolut genommenen entsprechenden Zuwächsen von $\pi(\lambda)$, $\nu(\lambda)$, $\frac{1}{2}\sigma(\lambda)$ sind:

$$\Delta R(\lambda) \geqq \Delta R^*(\lambda) \geqq |\Delta\pi(\lambda)| = |\Delta\nu(\lambda)| = \tfrac{1}{2}|\Delta\sigma(\lambda)|. \tag{15}$$

10. Da es sich nun aber bei den Δ-Ausdrücken in (15) offenbar um spezielle Werte von *Intervallfunktionen* handelt, wird man sich fragen, ob die Relation (15) auch dann richtig ist, wenn die Δ-Zuwächse in (15) Zuwächse über ein allgemeines Intervall $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ sind. Wir werden nun in Nr. 17 und Nr. 24 beweisen, daß (15) in der Tat auch für ein allgemeines Intervall (λ_1, λ_2) gilt, sofern λ_1 und λ_2 selbst keine Wurzeln von (8) sind:

Satz 7. *Sind B, C zwei Hermitesche Matrizen gleicher Ordnung und sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 < \lambda_2$, keine Wurzeln von* (8), *so gilt in den obigen Bezeichnungen*

$$\Delta R^*(\lambda) \geqq \tfrac{1}{2}|\Delta\sigma(\lambda)| = |\Delta\pi(\lambda)| = |\Delta\nu(\lambda)|, \tag{16}$$

unter Δ jeweils der Zuwachs der betreffenden Größe von λ_1 bis λ_2 verstanden. Setzt man für das Intervall $J = (\lambda_1, \lambda_2)$:

$$\Delta R^* - \tfrac{1}{2}|\Delta\sigma| = D(J), \tag{17}$$

so ist $D(J)$ eine nicht negative, ganzzahlige, gerade, superadditive Intervallfunktion, d.h. sie genügt der Ungleichung

$$D(J_1 + J_2) \geqq D(J_1) + D(J_2), \tag{18}$$

wenn J_1 und J_2 zwei aneinanderstoßende Intervalle sind, die den obigen Bedingungen genügen.

Insbesondere folgt aus dem Satz 7, daß wenn $D(-\infty, \infty) = 0$, dann D für jedes Intervall verschwindet und daher in (16) stets das Gleichheitszeichen gilt.

11. Die Beweise der oben angegebenen Sätze beruhen auf der Reduktionstheorie von Büscheln Hermitescher Formen, wie sie sich seit den ersten Arbeiten von WEIERSTRASS im Laufe einer 75-jährigen Entwicklung ausgebildet hat. Wir brauchen dabei nur das in der Nr. 16 angegebene Hauptresultat dieser Theorie, wonach jedes „reguläre" Büschel Hermitescher Formen sich durch eine reelle Variablentransformation auf eine Summe von gewissen

„Einzelformen" mit getrennten Variablen bringen läßt, wobei diese Einzelformen einerseits den reellen Elementarteiler des Büschels und andererseits den Paaren konjugiert komplexer Elementarteiler des Büschels entsprechen. Die Signaturen dieser Einzelformen werden in den Nrn. 12—15 diskutiert und aus den Resultaten dieser Diskussion, die vor allem in der Tabelle (23) der Nr. 12 zusammengefaßt sind, lassen sich dann unsere Sätze ziemlich leicht ablesen, solange $|C| \neq 0$ vorausgesetzt werden kann.

Der Satz 7 läßt sich dann durch die relativ einfache algebraische Überlegung der Nr. 24 auch auf den Fall $|C| = 0$ ausdehnen. Was aber die Sätze über das Matrizenprodukt AB anbetrifft, so müssen wir Stetigkeitsbetrachtungen anstellen, um sie auf den Fall $|A| = |B| = 0$ (vgl. die Nrn. 22, 23) zu verallgemeinern.

12. Wir werden im folgenden gewisse spezielle Hermitesche Formen zu untersuchen haben, die von einem reellen Parameter λ, einer reellen Zahl ϱ sowie von e konjugiert-komplexen Variablenpaaren abhängen, wo e einen der Werte 1, 2, ... hat. Es sind dies die Formen

$$(19) \quad K_{\varrho,e}(\lambda) = (\varrho - \lambda)[x_1\bar{x}_e + x_2\bar{x}_{e-1} + \cdots + x_e\bar{x}_1] + [x_1\bar{x}_{e-1} + \cdots + x_{e-1}\bar{x}_1].$$

Wir stellen uns die Aufgabe, für die Form K die Signatur, sowie die Anzahl der positiven und der negativen Eigenwerte in Abhängigkeit von λ zu bestimmen.

Offenbar ist die zu (19) gehörende Matrix durch die folgende Matrix der Ordnung e gegeben,

$$\begin{pmatrix} & & & & 1 & \varrho - \lambda \\ & & & 1 & \varrho - \lambda & \\ & & \iddots & \iddots & & \\ & 0 & \iddots & & & \\ & & 1 & & 0 & \\ 1 & & \varrho - \lambda & & & \\ \varrho - \lambda & & & & & \end{pmatrix},$$

wo die erste Nebendiagonale nur $\varrho - \lambda$ als Elemente hat, die erste Supernebendiagonale dazu nur lauter 1 enthält, und alle anderen Elemente verschwinden. Man erkennt sofort, daß die zugehörige Determinante den Wert

$$(20) \quad (-1)^{\frac{e(e-1)}{2}} (\varrho - \lambda)^e$$

hat.

Setzen wir zuerst $\lambda = \varrho$, so reduziert sich unsere Form auf

$$K_{\varrho,e}(\varrho) = x_1\bar{x}_{e-1} + \cdots + x_{e-1}\bar{x}_1,$$

und dies ist für *ungerade* $e = 2m + 1$ gleich

$$(21) \quad (x_1\bar{x}_{2m} + x_{2m}\bar{x}_1) + (x_2\bar{x}_{2m-1} + x_{2m-1}\bar{x}_2) + \cdots + (x_m\bar{x}_{m+1} + x_{m+1}\bar{x}_m),$$

während für *gerade* $e=2m+2$ wir die Darstellung

$$(22) \qquad (x_1\bar{x}_{2m+1}+x_{2m+1}\bar{x}_1)+\cdots+(x_m\bar{x}_{m+2}+x_{m+2}\bar{x}_m)+|x_{m+1}|^2$$

bekommen. In beiden Fällen enthalten die Klammerausdrücke nur getrennte Variablensysteme, so daß man die Eigenwerte erhält, wenn man für jeden der Klammerausdrücke seine Eigenwerte bestimmt. Diese einzelnen Klammerausdrücke haben aber alle den Typus $x\bar{y}+y\bar{x}=2\Re x\bar{y}$ und dies geht durch die unitär-orthogonale Substitution

$$x=\frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}, \qquad y=\frac{\xi-\eta}{\sqrt{2}}$$

über in

$$2\Re x\bar{y}=|\xi|^2-|\eta|^2.$$

Daher entspricht jedem unserer Klammerausdrücke ein Eigenwert $=1$ und ein Eigenwert $=-1$. Damit haben wir im Falle (21) $(e=2m+1)$ m mal den Eigenwert 1, m mal den Eigenwert -1, $\sigma=0$, sowie einen verschwindenden Eigenwert, da die Determinante für $\lambda=\varrho$ verschwindet. Im Falle (22) $(e=2m+2)$ haben wir, unter Berücksichtigung des letzten Terms, $m+1$ mal den Eigenwert 1 und m mal den Eigenwert -1, $\sigma=1$, wozu wiederum der eine verschwindende Eigenwert hinzukommt.

13. Lassen wir nun λ gegen ϱ konvergieren, so folgt aus der obigen Betrachtung, daß m Eigenwerte gegen -1 konvergieren, sowie, je nachdem ob $e=2m+1$ oder $e=2m+2$ ist, m oder $m+1$ Eigenwerte gegen 1 streben. Das Produkt aller dieser Eigenwerte konvergiert also in beiden Fällen gegen $(-1)^m$. Der übrigbleibende Eigenwert $E(\lambda)$ strebt dann gegen Null. Und da das Produkt sämtlicher Eigenwerte den Wert (20) besitzt, folgt leicht, daß $E(\lambda)\sim-(\lambda-\varrho)^e$ ist.

Da aber die Determinante unserer Form nur für $\lambda=\varrho$ verschwinden kann, können ihre Eigenwerte ihre Vorzeichen nur für $\lambda=\varrho$ wechseln. Unter Berücksichtigung dieser Tatsache sehen wir, daß im Falle ungerader e wir, für $\lambda>\varrho$, m positive und $m+1$ negative Eigenwerte haben, $\sigma=-1$, während für $\lambda<\varrho$ man $m+1$ positive und m negative Eigenwerte hat, $\sigma=1$. Für gerade e dagegen ist $E(\lambda)$ immer ≤ 0 und wir haben daher, für $\lambda\gtrless\varrho$, $m+1$ positive und $m+1$ negative Eigenwerte, $\sigma=0$. Wir können die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammenfassen:

(23)

e	$\lambda<\varrho$	$\lambda>\varrho$	$\lambda=\varrho$
$2m+1$	$\sigma=1$	$\sigma=-1$	$\sigma=0$
$2m+2$	$\sigma=0$	$\sigma=0$	$\sigma=1$

14. Wir betrachten ferner gewisse spezielle Hermitesche Formen in den $2e$ konjugiert-komplexen Variablenpaaren $x_1, x_2, \ldots, x_e; \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_e; y_1, y_2, \ldots, y_e; \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_e$. Diese Formen werden zugeordnet einer beliebigen *nicht reellen* Zahl ϱ, einer beliebigen von Null verschiedenen Zahl γ, sowie der natürlichen

Zahl e, und sind definiert durch:

$$(24)\quad \begin{cases} K_{\varrho,\gamma,e}(\lambda) = \gamma(\varrho-\lambda)\sum_{\nu=1}^{e}(x_\nu+iy_\nu)(\bar{x}_{e-\nu+1}+i\bar{y}_{e-\nu+1}) + \\ \quad +\gamma\sum_{\nu=1}^{e-1}(x_\nu+iy_\nu)(\bar{x}_{e-\nu}+i\bar{y}_{e-\nu})+\bar{\gamma}(\bar{\varrho}-\lambda)\sum_{\nu=1}^{e}(x_\nu-iy_\nu)\times \\ \quad \times(\bar{x}_{e-\nu+1}-i\bar{y}_{e-\nu+1})+\bar{\gamma}\sum_{\nu=1}^{e-1}(x_\nu-iy_\nu)(\bar{x}_{e-\nu}-i\bar{y}_{e-\nu}). \end{cases}$$

Dieser Ausdruck ist offenbar ein reelles Polynom in bezug auf die $x_\nu, y_\nu, \bar{x}_\nu, \bar{y}_\nu$. Und da es zugleich linear in den x_ν, y_ν ist und ebenso linear in den $\bar{x}_\nu, \bar{y}_\nu$, stellt dieser Ausdruck eine Hermitesche Form der Ordnung $2e$ dar. Wir wollen nun beweisen, daß diese Hermitesche Form *für jeden reellen Wert von λ die Signatur Null hat.* Zu diesem Zwecke bezeichnen wir die Form (24), um ihre Abhängigkeit von Variablen zum Ausdruck zu bringen, mit $K(x_\nu, y_\nu)$. Man übe nun auf die Variablen in dieser Form die Transformation aus, die nach dem Trägheitssatz die Signatur nicht ändern:

$$x_\nu=\eta_\nu, \quad y_\nu=-\xi_\nu, \quad \bar{x}_\nu=\bar{\eta}_\nu, \quad \bar{y}_\nu=-\bar{\xi}_\nu.$$

Dann gilt offenbar:

$$x_\nu+iy_\nu=-i(\xi_\nu+i\eta_\nu), \quad x_\nu-iy_\nu=i(\xi_\nu-i\eta_\nu),$$
$$\bar{x}_\nu+i\bar{y}_\nu=-i(\bar{\xi}_\nu+i\bar{\eta}_\nu), \quad \bar{x}_\nu-i\bar{y}_\nu=i(\bar{\xi}_\nu-i\bar{\eta}_\nu).$$

Dann ergibt sich offenbar:

$$(25)\qquad K(x_\nu, y_\nu) = -K(\xi_\nu, \eta_\nu).$$

Ist nun σ die Signatur von $K(x_\nu, y_\nu)$, so folgt aus (25) $\sigma=-\sigma$, $\sigma=0$.

15. Wir wollen nunmehr die Determinante Δ der Hermiteschen Form (24) bestimmen. Diese Determinante ist offenbar die gleiche, wie diejenige der Bilinearform

$$\gamma(\varrho-\lambda)\sum_{\nu=1}^{e}(x_\nu+iy_\nu)(\xi_{e-\nu+1}+i\eta_{e-\nu+1})+\gamma\sum_{\nu=1}^{e-1}(x_\nu+iy_\nu)(\xi_{e-\nu}+i\eta_{e-\nu})+$$
$$+\bar{\gamma}(\bar{\varrho}-\lambda)\sum_{\nu=1}^{e}(x_\nu-iy_\nu)(\xi_{e-\nu+1}-i\eta_{e-\nu+1})+\bar{\gamma}\sum_{\nu=1}^{e-1}(x_\nu-iy_\nu)(\xi_{e-\nu}-i\eta_{e-\nu}).$$

Üben wir nun die Variablentransformation aus:

$$(26)\qquad x_\nu+iy_\nu=X_\nu, \quad x_\nu-iy_\nu=Y_\nu,$$
$$(27)\qquad \xi_\nu+i\eta_\nu=\Xi_\nu, \quad \xi_\nu-i\eta_\nu=H_\nu, \qquad (\nu=1,\ \ldots e)$$

so geht unsere Bilinearform über in

$$(28)\quad \gamma(\varrho-\lambda)\sum_{\nu=1}^{e}X_\nu\Xi_{e-\nu+1}+\gamma\sum_{\nu=1}^{e-1}X_\nu\Xi_{e-\nu}+\bar{\gamma}(\bar{\varrho}-\lambda)\sum_{\nu=1}^{e}Y_\nu H_{e-\nu+1}+\bar{\gamma}\sum_{\nu=1}^{e-1}Y_\nu H_{e-\nu}.$$

Bezeichnen wir die Determinante der Bilinearform (28) mit Δ_1, so gilt offenbar, da die Determinanten der Substitutionen (26) und (27) beide den Wert $(-2i)^e$ haben,

$$\Delta = 2^{2e}(-1)^e \Delta_1.$$

Anderseits zerfällt aber die Bilinearform (28) in eine Summe von 2 Bilinearformen mit getrennten Variablen, zu denen die beiden Matrizen gehören

$$\gamma \begin{pmatrix} & & & 1 & \varrho-\lambda \\ & & & \varrho-\lambda & \\ & 0 & \iddots & \iddots & \\ & & 1 & & 0 \\ 1 & & \varrho-\lambda & & \\ \varrho-\lambda & & & & \end{pmatrix}, \qquad \bar{\gamma} \begin{pmatrix} & & & 1 & \bar{\varrho}-\lambda \\ & & & \bar{\varrho}-\lambda & \\ & 0 & \iddots & \iddots & \\ & & 1 & & 0 \\ 1 & & \bar{\varrho}-\lambda & & \\ \bar{\varrho}-\lambda & & & & \end{pmatrix}.$$

Daher ergibt sich $\Delta_1 = \gamma^e(\varrho-\lambda)^e \bar{\gamma}^e(\bar{\varrho}-\lambda)^e$, und daher schließlich

$$\Delta = [-4|\gamma|^2(\varrho-\lambda)(\bar{\varrho}-\lambda)]^e. \tag{29}$$

Das für uns wesentliche an der Formel (29) ist, daß die Determinante von (24) für kein reelles λ verschwindet. Daher gilt für die Form (24) für jeden reellen Wert von λ

$$\pi_K = \nu_K = e \qquad (K = K_{\varrho,\gamma,e}(\lambda)). \tag{30}$$

16. Man kann nun als das Hauptresultat der Reduktionstheorie der Büschel (7) Hermitescher Matrizen mit regulärer Matrix C bezeichnen[5]), daß ein solches Büschel Hermitescher Formen sich durch eine *reelle* Variablentransformation auf die folgende Gestalt bringen läßt

$$\sum K_{\varrho,\gamma,e}(\lambda) + \sum \varepsilon_i K_{\varrho_i,e_i}(\lambda) + \sum \delta_p K_{\varrho_p,e_p}(\lambda). \tag{31}$$

Dabei entsprechen die einzelnen Terme der ersten Summe den Paaren konjugiert komplexer Elementarteiler von (7) $(\lambda-\varrho)^e$, $(\lambda-\bar{\varrho})^e$, während die Konstanten γ gewisse nicht verschwindende Werte haben. Die Glieder der

[5]) Im Falle reeller quadratischer Formen ist die Zerlegung (31) im Prinzip 1858 und 1868 von Weierstrass ([*15*], [*16*]) hergeleitet worden, wobei eine beim Weierstraßschen Beweis verbliebene Lücke erst 1894 durch Frobenius [*3*] ausgefüllt wurde. Inzwischen gelang es aber 1879 L. Stickelberger [*12*], die fragliche Schwierigkeit auf einem sehr scharfsinnig erdachten Umweg zu überwinden und damit eigentlich den ersten vollständig einwandfreien Beweis der Zerlegung (31) zu geben. Weierstrass nimmt allerdings die Vorzeichenfaktoren ε_i, δ_p in die Variablen auf, womit sich eine etwas einfachere Gestalt der Darstellung (31) ergibt, die Transformation aber *komplex* wird. Für die von uns benutzte Gestalt der Zerlegung (31) vgl. im Falle quadratischer Formen Klein [*5*], pp. 27—30. Der Invarianzcharakter der Vorzeichenfaktoren ε_i, δ_p gegenüber reellen Transformationen wurde erst 1905 von Muth [*8*] präzisiert und erhärtet. Die Übertragung der ganzen Diskussion auf Hermitesche Formen wurde zwar bereits 1890 von Segre [*10*] und 1900 von Loewy [*7*] ins Auge gefaßt, vollständig einwandfrei wurde indessen die ganze Diskussion erst 1934/1935 durchgeführt von Trott [*13*], Turnbull [*14*] sowie von Ingraham and Wegner [*4*]. Für (31) vgl. z.B. [*14*], p. 234.

zweiten Summe entsprechen sämtlichen reellen Elementarteilern von (7), $(\lambda-\varrho_i)^{e_i}$, mit *ungeraden* e_i, während jedes der ε_i einen der Werte ± 1 hat. Analog entsprechen die Terme der dritten Summe den reellen Elementarteilern von (7), $(\lambda-\varrho_p)^{e_p}$, mit *geraden* e_p, und die δ_p haben wiederum die Werte ± 1. Alle in (31) auftretenden Einzelformen haben dabei getrennte Variablen.

17. Wir setzen nun für die in (7) definierten Matrizen M_λ, wie in (14),

$$\sigma(\lambda)=\sigma_{M_\lambda},\quad \pi(\lambda)=\pi_{M_\lambda},\quad \nu(\lambda)=\nu_{M_\lambda},\quad \delta(\lambda)=\delta_{M_\lambda} \tag{32}$$

und wollen für $\lambda_1<\lambda_2$ aus der Darstellung (31) einen Ausdruck für den Zuwachs von $\sigma(\lambda)$ beim Übergang von λ_1 zu λ_2 herleiten. Dabei sollen auch $\lambda_1=-\infty$ und $\lambda_2=+\infty$ zugelassen werden.

Nun haben die in der ersten Summe von (31) auftretenden Einzelformen $K_{\varrho,\gamma,e}(\lambda)$, nach dem in Nr. 15 Bewiesenen, durchwegs die Signatur Null und tragen daher nichts zum Zuwachs von $\sigma(\lambda)$ bei.

Für die in der zweiten Summe von (31) vorkommenden $K_{\varrho_i,e_i}(\lambda)$ mit *ungeraden* e_i erhält man aus der Tabelle (23) der Nr. 13 beim Durchgang durch ϱ_i den Wert -2 als Zuwachs von σ. Daher liefern die im *offenen* Intervall (λ_1,λ_2) liegenden ϱ_i insgesamt den Zuwachs $-2\sum_{\lambda_1<\varrho_i<\lambda_2}\varepsilon_i$ für σ. Ist λ_1 eines der ϱ_i, so ergibt sich das zugehörige $-\varepsilon_i$ als Zuwachs von σ. Ist λ_2 eines der ϱ_i, so erfährt an dieser Stelle σ den entsprechenden Zuwachs $-\varepsilon_i$. Daher ergibt sich als der Beitrag der zweiten Teilsumme in (31) zu dem Zuwachs von σ:

$$-2\sum_{\lambda_1<\varrho_i<\lambda_2}\varepsilon_i-\sum_{\varrho_i=\lambda_1}\varepsilon_i-\sum_{\varrho_i=\lambda_2}\varepsilon_i.$$

Was aber die Terme der dritten Summe in (31) anbetrifft, so ergibt sich aus der Tabelle (23) der Nr. 13, daß sie für die im offenen Intervall (λ_1,λ_2) liegenden ϱ_p keinen Beitrag zum Zuwachs von σ liefern. Ferner erhält man, wenn $\lambda_1=\varrho_p$ ist, $-\delta_p$ als den entsprechenden Zuwachs von σ, während, wenn λ_2 ein ϱ_p ist, der entsprechende Zuwachs von σ gleich δ_p ist. Zusammenfassend erhalten wir daher

$$\Delta\sigma=\sigma(\lambda_2)-\sigma(\lambda_1)=-2\sum_{\lambda_1<\varrho_i<\lambda_2}\varepsilon_i-\sum_{\varrho_i=\lambda_1}\varepsilon_i-\sum_{\varrho_i=\lambda_2}\varepsilon_i-\sum_{\varrho_p=\lambda_1}\delta_p+\sum_{\varrho_p=\lambda_2}\delta_p. \tag{33}$$

Nehmen wir nun an, daß weder für λ_1 noch für λ_2 die Gl. (8) erfüllt ist, so reduziert sich (33) auf die Relation

$$\sigma(\lambda_2)-\sigma(\lambda_1)=-2\sum_{\lambda_1<\varrho_i<\lambda_2}\varepsilon_i. \tag{34}$$

Schätzt man hier den Ausdruck rechts durch $2\Delta R^*(\lambda)$ ab, wobei er mod 4 unverändert bleibt, so ergibt sich die auf die Formel (16) des Satzes 7 bezügliche Behauptung unter der Annahme $|C|\neq 0$.

Wir bezeichnen das Intervall (λ_1,λ_2) mit J. Es sei $p(J)$ die Anzahl der positiven ε_i unter den ε_i in der Summe rechts in (34) und $n(J)$ die Anzahl der negativen. Dann gilt

$$\Delta R^*=n(J)+p(J),\qquad \tfrac{1}{2}|\Delta\sigma|=|p(J)-n(J)|$$

und in den Bezeichnungen des Satzes 7

$$D(J) = n(J) + p(J) - |p(J) - n(J)| = 2\,\mathrm{Min}\,(n(J), p(J)).$$

Daraus folgt aber sofort, daß $D(J)$ ganzzahlig, gerade und nicht negativ ist. Die Superadditivität von $D(J)$ folgt aus der allgemeinen Relation

$$\mathrm{Min}\,(a_1 + a_2, b_1 + b_2) \geqq \mathrm{Min}\,(a_1, b_1) + \mathrm{Min}\,(a_2, b_2).$$

Damit ist der Satz 7 *unter der Annahme* $|C| \neq 0$ bewiesen.

18. Beachtet man, daß $\sigma(-\infty) = \sigma_C$, $\sigma(\infty) = -\sigma_C$ ist, so ergibt sich aus (33) für $\lambda_1 = -\infty$, $\lambda_2 = \infty$

$$\sigma_C = \sum_{\varrho_i} \varepsilon_i. \tag{35}$$

Schätzt man in (35) die rechte Seite durch die ihr mod 2 kongruente Anzahl der ϱ_i ab, so folgt der Satz 4 und der Zusatz dazu.

Setzen wir in (33) $\lambda_1 = -\infty$ und ersetzen λ_2 durch λ, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (35) für $\sigma(\lambda)$ den Ausdruck

$$\sum_{-\infty<\varrho<\infty} \varepsilon_i - 2\sum_{\varrho_i<\lambda} \varepsilon_i - \sum_{\varrho_i=\lambda} \varepsilon_i + \sum_{\varrho_p=\lambda} \delta_p = \sum_{\varrho_i>\lambda} \varepsilon_i - \sum_{\varrho_i<\lambda} \varepsilon_i + \sum_{\varrho_p=\lambda} \delta_p.$$

Das können wir zusammenfassen in

$$\sigma(\lambda) = \sum_{\varrho_i \neq \lambda} \varepsilon_i \,\mathrm{sgn}\,(\varrho_i - \lambda) + \sum_{\varrho_p=\lambda} \delta_p. \tag{36}$$

Für $\lambda = 0$ ergibt sich nunmehr der Satz 4° ohne weiteres.

19. Aus der Formel (33) wollen wir nunmehr Ausdrücke und Schranken von $\pi(\lambda)$ und $\nu(\lambda)$ herleiten, indem wir von den Relationen Gebrauch machen:

$$2\pi(\lambda) = n - \delta(\lambda) + \sigma(\lambda), \qquad 2\nu(\lambda) = n - \delta(\lambda) - \sigma(\lambda).$$

Ist $2k$ die Gesamtanzahl komplexer Wurzeln von (8), so kann man offenbar unter der Benutzung der Zerlegung (31) und der in ihr verwendeten Bezeichnungen schreiben:

$$n - 2k = \sum_{\varrho_i \neq \lambda} e_i + \sum_{\varrho_p \neq \lambda} e_p + \sum_{\varrho_i=\lambda} e_i + \sum_{\varrho_p=\lambda} e_p.$$

Beachtet man, daß $\delta(\lambda)$ die Gesamtanzahl der $\varrho_i = \lambda$ und $\varrho_p = \lambda$ ist, so folgt weiter

$$n - 2k - \delta(\lambda) = \sum_{\varrho_i \neq \lambda} e_i + \sum_{\varrho_p \neq \lambda} e_p + \sum_{\varrho_i=\lambda} (e_i - 1) + \sum_{\varrho_p=\lambda} (e_p - 1).$$

Addieren bzw. subtrahieren wir hiervon die entsprechenden Therme von (36) und dividieren die entstehenden Relationen durch 2, so ergibt sich:

$$\pi(\lambda) - k = \sum_{\varrho_i>\lambda} \frac{e_i + \varepsilon_i}{2} + \sum_{\varrho_i<\lambda} \frac{e_i - \varepsilon_i}{2} + \sum_{\varrho_i=\lambda} \frac{e_i - 1}{2} + \sum_{\varrho_p \neq \lambda} \frac{e_p}{2} + \sum_{\varrho_p=\lambda} \frac{e_p + \delta_p - 1}{2}; \tag{37}$$

$$\nu(\lambda) - k = \sum_{\varrho_i>\lambda} \frac{e_i - \varepsilon_i}{2} + \sum_{\varrho_i<\lambda} \frac{e_i + \varepsilon_i}{2} + \sum_{\varrho_i=\lambda} \frac{e_i - 1}{2} + \sum_{\varrho_p \neq \lambda} \frac{e_p}{2} + \sum_{\varrho_p=\lambda} \frac{e_p - \delta_p - 1}{2}. \tag{38}$$

20. Aus diesen Darstellungen ergibt sich als die gemeinsame *obere Schranke* von $\pi(\lambda)-k$ und $\nu(\lambda)-k$:

$$\sum_{\varrho_i \neq \lambda} \frac{e_i+1}{2} + \sum_{\varrho_i=\lambda}\left[\frac{e_i}{2}\right] + \sum_{\varrho_p \neq \lambda}\left[\frac{e_p+1}{2}\right] + \sum_{\varrho_p=\lambda}\frac{e_p}{2},$$

und dies läßt sich in der Form zusammenschreiben,

$$\sum_{\varrho \neq \lambda}\left[\frac{e+1}{2}\right] + \sum_{\varrho=\lambda}\left[\frac{e_0}{2}\right], \tag{39}$$

wo e die Ordnungen aller reellen Elementarteiler durchläuft, die nicht für $\varrho=\lambda$ verschwinden, während e_0 durch die Ordnungen aller für $\varrho=\lambda$ verschwindender Elementarteiler läuft.

Analog erhält man aus (37) und (38) die gemeinsame *untere Schranke* für $\pi(\lambda)-k$ und $\nu(\lambda)-k$:

$$\sum_{\varrho_i \neq \lambda}\left[\frac{e_i}{2}\right] + \sum_{\varrho_i=\lambda}\frac{e_i-1}{2} + \sum_{\varrho_p \neq \lambda}\frac{e_p}{2} + \sum_{\varrho_p=\lambda}\left[\frac{e_p-1}{2}\right].$$

Dies läßt sich aber wieder in der Form zusammenfassen,

$$\sum_{\varrho \neq \lambda}\left[\frac{e}{2}\right] + \sum_{\varrho=\lambda}\left[\frac{e_0-1}{2}\right], \tag{40}$$

wo e bzw. e_0 durch die gleichen Werte laufen wie oben. Zusammenfassend erhalten wir als eine unwesentliche Verallgemeinerung des Satzes 5 den

Satz 5°. *Sind B, C Hermitesche Matrizen n-ter Ordnung, ist $|C| \neq 0$ und sind $\pi(\lambda)$ und $\nu(\lambda)$ bzw. die Anzahlen der positiven und negativen Eigenwerte von $M_\lambda = B - \lambda C$, so sind sowohl $\pi(\lambda)-k$ und $\nu(\lambda)-k$ zwischen den beiden Schranken* (39), (40) *enthalten.*

Für $\lambda=0$ und $\lambda=\pm\infty$ ergeben sich die Behauptungen des Satzes 5.

21. Wir spezialisieren jetzt die Formel (33), indem wir einmal setzen $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\infty$ und sodann $\lambda_1=-\infty$, $\lambda_2=0$. So ergibt sich aus (33):

$$\sigma_B + \sigma_C = 2\sum_{\varrho_i>0}\varepsilon_i + \sum_{\varrho_i=0}\varepsilon_i + \sum_{\varrho_p=0}\delta_p; \tag{41}$$

$$\sigma_B - \sigma_C = -2\sum_{\varrho_i<0}\varepsilon_i - \sum_{\varrho_i=0}\varepsilon_i + \sum_{\varrho_p=0}\delta_p. \tag{42}$$

Setzen wir nun:

$$S_+ = \sum_{\varrho_i>0}\varepsilon_i, \quad S_- = \sum_{\varrho_i<0}\varepsilon_i; \quad S_g = \sum_{\varrho_p=0}\delta_p, \quad S_u = \sum_{\varrho_i=0}\varepsilon_i,$$

so ergibt sich aus (41), (42)

$$S_+ = \tfrac{1}{2}(\sigma_C + \sigma_B - S_g - S_u), \tag{43}$$

$$S_- = \tfrac{1}{2}(\sigma_C - \sigma_B + S_g - S_u). \tag{44}$$

Man beachte nun, daß der Rang von B zugleich derjenige von $C^{-1}B = AB$ ist. Daher ist auch $\delta_B = \delta_{AB}$. Anderseits ist δ_{AB} zugleich die Anzahl der verschiedenen für $\lambda=0$ verschwindenden Elementarteiler von $AB-\lambda E$, und

damit auch nach (9) die Gesamtanzahl der verschwindenden ϱ_i und ϱ_k. Daraus folgt aber:

$$|S_g| + |S_u| \leqq \delta_B. \tag{45}$$

Berücksichtigt man dies, so ergeben sich aus (43), (44) die Schranken (3) und (4) des Satzes 2.

Zugleich sieht man, daß R_{AB}^{+}, R_{AB}^{-} in Satz 2 durch die Anzahlen der Elementarteiler *ungerader Ordnung* von AB mit positiven bzw. negativen Nullstellen ersetzt werden können.

22. Wir beweisen nunmehr den Satz 1. Da die Eigenwerte von AB die gleichen sind wie die von BA und bei der Multiplikation von A oder B mit -1 sich auch die Eigenwerte von AB sich mit -1 multiplizieren, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß

$$\operatorname{Min}(\pi_A, \nu_A, \pi_B, \nu_B) = \pi_A$$

ist. Ist A regulär, so folgt daher der Satz 1 aus dem über (10) Gesagten. Es sei A singulär. Dann läßt sich eine von einem *positiven* Parameter $t \leqq 1$ abhängige reguläre Hermitesche Matrix $A(t)$ n-ter Ordnung finden, derart, daß für hinreichend kleine positive t

$$\pi_{A(t)} = \pi_A$$

und zugleich

$$A(t) \to A(t \downarrow 0)$$

gilt[6]). Dann gilt auch

$$A(t)\, B \to AB \,(t \downarrow 0)$$

und nach (10)

$$K_{A(t)B} \leqq 2\pi_{A(t)} = 2\pi_A.$$

Da aber die komplexen Eigenwerte von AB für $t \downarrow 0$ Grenzwerte von *komplexen* Eigenwerten von $A(t)\,B$ sind, ist $K_{AB} \leqq K_{A(t)B}$ und der Satz 1 ist bewiesen, sobald wir gezeigt haben, daß K_{AB} gerade ist. Nun folgt aber für die Hermiteschen Formen A, B aus $A\overline{B} = (BA)'$, da AB, BA und $(BA)'$ die gleichen Eigenwerte haben, daß die komplexen Eigenwerte von AB sich zu Paaren konjugiert komplexer zusammenordnen lassen. Daher ist K_{AB} in der Tat gerade.

23. Wir beweisen jetzt den Satz 3. Ist einmal die auf (5) bezügliche Behauptung bewiesen, so folgt daraus die auf (6) bezügliche Behauptung, wenn man B durch $-B$ ersetzt, da dann σ_B sich mit -1 multipliziert und die positiven Eigenwerte von AB in negative übergehen. Wir können und wollen

[6]) Um $A(t)$ zu bilden, transformiere man die A entsprechende quadratische Form in $x_1, \ldots, x_n$ durch eine reelle reguläre Transformation zwischen den x_ν und den ξ_ν auf die Form:

$$\xi_1^2 + \cdots + \xi_{\pi_A}^2 - \xi_{\pi_A+1}^2 - \cdots - \xi_{\pi_A+\nu_A}^2,$$

subtrahiere $\frac{t}{2}\sum_{\varkappa=1}^{n} \xi_\varkappa^2$ und transformiere sodann zurück auf die x_ν.

dabei ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $\sigma_A+\sigma_B\geqq 0$ ist, da man sonst nur A, B bzw. $-A$, $-B$ zu ersetzen braucht.

Ist nun A regulär, so benützen wir (3) und beachten, daß die Anzahl der verschwindenden Eigenwerte von AB wenigstens gleich $\delta_{AB}=\delta_B$ ist. Addieren wir aber links in (3) die Gesamtordnung des Eigenwerts Null bei AB und rechts δ_B, so ergibt sich gerade die Relation (5).

Es sei nun A singulär. Dann können wir, analog wie in der Nr. 22, eine von einem positiven Parameter $t\leqq 1$ abhängige reguläre Hermitesche Matrix $A(t)$ gleicher Ordnung wie A finden, derart, daß $A(t)\to A(t\downarrow 0)$ und für hinreichend kleine positive t

$$\pi_{A(t)}=\pi_A+\delta_A, \qquad \nu_{A(t)}=\nu_A$$

und daher $\sigma_{A(t)}=\sigma_A+\delta_A$ gilt[7]). Dann folgt aus (3)

$$R^+_{A(t)B}\geqq \tfrac{1}{2}(\sigma_A+\sigma_B+\delta_A-\delta_B)$$

und daher, da die Gesamtordnung der verschwindenden Eigenwerte von $A(t)B$ wenigstens gleich δ_B ist,

$$\overline{R}^+_{A(t)B}\geqq \tfrac{1}{2}(\sigma_A+\sigma_B+\delta_A+\delta_B).$$

Läßt man nun t gegen 0 fallen, so entsprechen in der Grenze den nicht negativen Eigenwerten von $A(t)B$ wenigstens ebenso viele nicht negative Eigenwerte von AB. Deshalb gilt erst recht

$$\overline{R}^+_{A(t)B}\geqq \tfrac{1}{2}(\sigma_A+\sigma_B+\delta_A+\delta_B),$$

womit (5) und damit der Satz 3 vollständig bewiesen ist.

24. Wir beweisen endlich die Formel (16) des Satzes 7, die am Schlusse der Nr. 17 nur unter der Annahme $|C|\neq 0$ bewiesen wurde. Dabei dürfen und wollen wir unbeschadet der Allgemeinheit voraussetzen, daß $\lambda_1=0$, $\lambda_2=p>0$ ist. In der Tat wird der allgemeine Fall auf diesen durch die Transformation $\lambda=\lambda_1+\mu$ zurückgeführt. Dann lautet die zu beweisende Relation:

$$R^*(p)-R^*(0)\geqq \tfrac{1}{2}|\sigma_{B-pC}-\sigma_B|, \tag{46}$$

wobei vorausgesetzt wird, daß $|B|\neq 0$, $|B-pC|\neq 0$ ist. Man betrachte nun das Matrizenbüschel $C-\mu B$. Da hier $|B|\neq 0$ ist, ist darauf nach dem bereits Bewiesenen die Relation (16) anwendbar, und wir wenden sie auf das Intervall $(1/p, \infty)$ an. In der Tat ist nach Voraussetzung weder $1/p$ noch ∞ eine Wurzel von $|C-\mu B|$. Nun ist die Anzahl der reellen Eigenwerte ungerader Ordnung von $C-\mu B$ mit $\mu>\frac{1}{p}$ gleich der entsprechenden Anzahl für von $C-\frac{1}{\lambda}B$ mit $0<\lambda<p$, und dies ist gerade $R^*(p)-R^*(0)$. Daher liefert die Anwendung von (16) auf unser Büschel

$$R^*(p)-R^*(0)\geqq \left|\sigma_{-B}-\sigma_{C-\frac{1}{p}B}\right|. \tag{47}$$

[7]) Hierzu braucht man nur in der in Fußnote [6]) angegebenen Konstruktion t durch $-t$ zu ersetzen.

Hier ist aber $\sigma_{-B} = -\sigma_B$ und $\sigma_{C-\frac{1}{p}B} = \sigma_{pC-B} = -\sigma_{B-pC}$, womit (47) in (46) übergeht. Damit ist der Satz 7 vollständig bewiesen, da die auf $D(J)$ bezüglichen Behauptungen in Nr. 17 bereits allgemein bewiesen wurden.

Literatur

[1] Amir-Moéz, Ali R.: Extreme properties of eigenvalues of a Hermitian transformation and singular values of the sum and product of linear transformation. Duke Math. J. **23**, 463–476 (1956). — [2] Bromwich, T. J.: On a canonical reduction of bilinear forms. Proc. L. M. S. **32**, 321–352 (1900). — [3] Frobenius, G.: Über die Elementarteiler der Determinanten. Berliner Sitz.-Berichte **1894**, 31–44. — [4] Ingraham, M. H., and K. W. Wegner: The equivalence of pairs of Hermitian matrices. Trans. A. M. S. **38**, 145–162 (1935). — [5] Klein, F.: Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linien-Coordinaten auf eine canonische Form, Inaug.-Diss. Bonn 1868, wieder abgedruckt in Math. Ann. **23**, 539–578 (1884), wieder abgedruckt in F. Kleins, Ges. Math. Abh., Bd. 1, pp. 7–48. Unsere Zitate beziehen sich auf den letztgenannten Wiederabdruck. — [6] Loewy, A.: Über die Charakteristik einer reellen quadratischen Form von nicht verschwindender Determinante. Math. Ann. **72**, 588–592 (1899). — [7] Loewy, A.: Über Scharen reeller quadratischer und Hermitescher Formen. J. reine u. angew. Math. **122**, 53–72 (1900). — [8] Muth, P.: Über reelle Äquivalenz von Scharen reeller quadratischer Formen. J. reine u. angew. Math. **128**, 302–321 (1905). — [9] Ostrowski, A.: Über Eigenwerte von Produkten Hermitescher Matrizen (Helmut Hasse zum 60. Geburtstag). Hamb. Math. Abh. **23**, 60–68 (1959). — [10] Segre, C.: Un nuovo campo di ricerche geometriche. Atti della reale acad. di Torino **26**, 47–49 (1890). — [11] Sylvester, J. J.: The algebraical theory of the secular-nequality determinantive equation generalized. Phil. Magazine **6**, 214–216 (1853), wieder abgedruckt in Coll. Math. Papers, Vol. I, pp. 634–636. — [12] Stickelberger, L.: Über Scharen von bilinearen und quadratischen Formen. J. reine u. angew. Math. **86**, 20–43 (1879). — [13] Trott, G. R.: On the canonical form of a non singular pencil of Hermitian matrices. Amer. J. Math. **56**, 359–371 (1934). — [14] Turnbull, H. W.: On the equivalence of pencils of Hermitian Forms. Proc. L. M. S. (2) **39**, 232–248 (1935). — [15] Weierstrass, K.: Über ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem, nebst Anwendung desselben auf die Theorie der kleinen Schwingungen. Monatsber. Akad. Wiss. Berlin **1858**, 207–220. — [16] Weierstrass, K.: Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen. Monatsber. Akad. Wiss. Berlin **1868**, 310–338.

Mathematische Anstalt der Universität Basel (Schweiz)

(Eingegangen am 25. Juni 1958)

PERRON, O.
Math. Zeitschr. 72, 16—24 (1959)

Über lineare Differenzengleichungen und eine Anwendung auf lineare Differentialgleichungen mit Polynomkoeffizienten

Dem Andenken an LEON LICHTENSTEIN gewidmet

Von

OSKAR PERRON

§ 1. Einleitung

Man hat sich neuerdings mit linearen Differentialgleichungen

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P_1(x)\,\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + P_m(x)\,y = 0$$

beschäftigt, deren Koeffizienten $P_i(x)$ Polynome von x sind. Die Integrale sind selbstverständlich ganze Funktionen von x, und man hat unter anderem nach deren Wachstumsordnung α und zugehörigem Typus γ gefragt (WITTICH **1**, **2**; PÖSCHL **1**, **2**, **3**), die für eine ganze transzendente Funktion $f(x)$ bekanntlich so definiert sind: Setzt man

$$\max_{|x|=r} |f(x)| = M(r),$$

so ist

$$\alpha = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log M(r)}{\log r}, \qquad \gamma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log M(r)}{r^\alpha}.$$

Entwickelt man die Funktion $f(x)$ in ihre Taylorsche Reihe

$$f(x) = D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \cdots,$$

so gibt es auch eine Koeffizientenordnung ϱ und zugehörigen Typus σ, die so definiert sind:

$$\varrho = \overline{\lim_{\mu\to\infty}} \frac{\log\left|\frac{1}{D_\mu}\right|}{\log(\mu!)}, \qquad \sigma = \overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{|D_\mu|\,(\mu!)^\varrho} = \overline{\lim_{\mu\to\infty}} e^{-\varrho}\mu^\varrho \sqrt[\mu]{|D_\mu|}.$$

Zwischen α, γ und ϱ, σ besteht bekanntlich der Zusammenhang[1])

$$\alpha = \frac{1}{\varrho}, \qquad \gamma\alpha = \sigma^\alpha.$$

Statt nach α und γ kann man daher ebensogut nach ϱ und σ fragen, und da scheint mir bei Behandlung des Problems besonders zweckmäßig, weil di Differentialgleichung die Koeffizienten D_μ rekurrent zu berechnen gestattet

[1]) Siehe etwa L. BIEBERBACH: Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II, S. 231. Da obige α heißt dort ϱ, das γ heißt σ.

dem sie für sie eine lineare Differenzengleichung liefert. Ich habe dieses erfahren schon vor 50 Jahren bei einer verwandten Fragestellung angewandt PERRON 2) und mich dabei auf einen kurz zuvor (PERRON 1) gewonnenen atz über eine Klasse linearer Differenzengleichungen gestützt. Der Beweis eses Satzes war sehr verwickelt. Ich kann ihn heute, wenn ich die Koeffienten der Differenzengleichung ein klein wenig spezieller annehme, was für en vorliegenden Zweck genügt, wesentlich kürzer gestalten und zugleich ch eine von KREUSER 1 gefundene Verschärfung gewinnen, durch die sich cht nur die Ordnung ϱ wie damals, sondern auch der zugehörige Typus σ gibt.

§ 2. Eine lineare Differenzengleichung

Der zu benutzende Satz über Differenzengleichungen lautet:

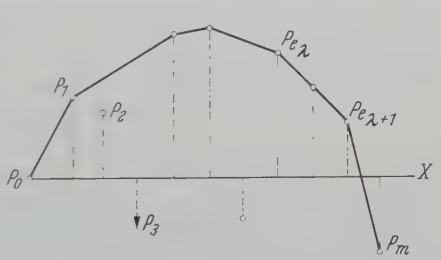
Satz A. *Die Koeffizienten der linearen Differenzengleichung m-ter Ordnung*

$$D_{\mu+m} + p_1(\mu)\, D_{\mu+m-1} + \cdots + p_m(\mu)\, D_\mu = 0 \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ögen die Form haben

$$p_i(\mu) = A_i \mu^{k_i} + o(\mu^{k_i}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

o die A_i komplexe, die k_i reelle Zahlen sind und $o(\mu^{k_i})$ das bekannte Ordnungssymbol für $\mu \to \infty$ bedeutet. Bei einem verschwindenden $p_i(\mu)$ werde $k_i = -\infty$ esetzt.



Man markiere in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die $m+1$ unkte P_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, m)$ mit den oordinaten $x = i$, $y = k_i$ (wobei $k_0 = 0$) nd führe von P_0 nach P_m einen nach er positiven Y-Seite konvexen Newton-uiseuxschen (später abgekürzt NP-) treckenzug, der eindeutig durch die orderung bestimmt ist, daß jede Ecke einer der Punkte P_i ist, während die brigen dieser Punkte nicht auf der konvexen Seite liegen dürfen (s. die Figur). ie Eckpunkte seien

$$P_{e_0} = P_0,\ P_{e_1},\ P_{e_2},\ \ldots,\ P_{e_g} = P_m.$$

er Richtungskoeffizient der Strecke $\overline{P_{e_\lambda} P_{e_{\lambda+1}}}$

$$\frac{k_{e_{\lambda+1}} - k_{e_\lambda}}{e_{\lambda+1} - e_\lambda}$$

erde mit q_λ bezeichnet[2]*, wobei dann*

$$q_0 > q_1 > q_2 > \cdots > q_{g-1}$$

[2]) Bei der späteren Anwendung sind alle k_i und folglich auch die q_λ negativ, was in er Figur des gefälligeren Aussehens wegen nicht der Fall ist.

ist und außerdem

$$k_i - i\,q_\lambda \leqq k_{e_\lambda} - e_\lambda\, q_\lambda,$$

mit Gleichheit insbesondere für $i = e_\lambda$ *und* $i = e_{\lambda+1}$ *und mit Ungleichheit insbesondere für* $i < e_\lambda$ *und* $i > e_{\lambda+1}$.

Dann hat die Differenzengleichung ein Fundamentalsystem von Lösungen, die derart in g *Klassen* $K_0, K_1, \ldots, K_{g-1}$ *zerfallen, daß die Klasse* K_λ *genau* $e_{\lambda+1} - e_\lambda$ *linear unabhängige Lösungen enthält, die nebst ihren linearen Verbindungen die Ordnung* $-q_\lambda$ *haben, d.h., bei ihnen ist*

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{\log\left|\frac{1}{D_\mu}\right|}{\log(\mu!)} = -q_\lambda \qquad \text{(PERRON 1)}.$$

Bilden wir ferner mit einem festen λ $(=0, 1, \ldots, g-1)$ *die Gleichung*

$$\sum_i^{(\lambda)} A_i z^{m-i} = 0, \tag{2}$$

wo die Summe $\sum^{(\lambda)}$ *über diejenigen Indizes* i *läuft, für welche* $k_i - i\,q_\lambda = k_{e_\lambda} - e_\lambda q_\lambda$ *ist, so ist diese vom Grad* $m - e_\lambda$ *und hat die* $(m - e_{\lambda-1})$*-fache Wurzel* 0. *Außerdem habe sie noch* j_1 *Wurzeln vom Betrag* σ_1, j_2 *Wurzeln vom Betrag* $\sigma_2, \ldots, j_s$ *Wurzeln vom Betrag* σ_s, *wo dann*

$$j_1 + j_2 + \cdots + j_s = e_{\lambda+1} - e_\lambda \quad \textit{und etwa} \quad \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_s$$

ist[3]). *Dann zerfallen die* $e_{\lambda+1} - e_\lambda$ *Lösungen der Klasse* K_λ *in* s *Unterklassen* $K_{\lambda 1}, \ldots, K_{\lambda s}$ *mit* $j_1, \ldots, j_s$ *Lösungen, wobei die Lösungen der Klasse* $K_{\lambda l}$ *und ihre linearen Verbindungen vom Typus* σ_l *sind, d.h., es ist*

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{|D_\mu|\,(\mu!)^{-q_\lambda}} = \sigma_l \qquad \text{(KREUSER 1)}.$$

Dieser Satz ergibt sich fast unmittelbar als Spezialfall aus dem nachstehenden Satz über Summengleichungen, zu dem ich 1921 durch wesentlich einfachere Überlegungen gelangt war (PERRON **3**), als ich sie in der Arbeit **1** hatte anstellen müssen und sie entsprechend auch KREUSER angestellt hat:

Satz B. *Die Koeffizienten der homogenen Summengleichung*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu + b_{\mu\nu})\, x_{\mu+\nu} = 0 \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

mögen so beschaffen sein, daß[4])

$$a_0 + b_{\mu 0} \neq 0 \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$|b_{\mu\nu}| \leqq k_\mu \vartheta^\nu \qquad (0 < \vartheta < 1;\ \mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\lim_{\mu\to\infty} k_\mu = 0,$$

---

[3]) Eigentlich sollten die j_l und σ_l und ebenso s noch den Index λ haben, den wir der Einfachheit halber unterdrücken, weil λ festgehalten wird.

[4]) Der Buchstabe k_μ ist des besseren Vergleichs halber aus meiner Arbeit **3** übernommen und hat mit den Exponenten k_i in Satz A natürlich nichts zu tun.

und daß die Funktion

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

für $|z| \leqq 1$ *regulär ist. Ist dann* n $(\geqq 0)$ *die Anzahl ihrer Nullstellen in diesem Bereich (mehrfache mehrfach gezählt), so hat die Summengleichung genau* n *linear unabhängige Lösungen, für die*

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{|x_\mu|} \leqq 1$$

ist.

Um hieraus den Satz A zu gewinnen, setzen wir in (1)

$$D_\mu = (\mu!)^q G^\mu x_\mu \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

wo wir uns für q und G eine geeignete wechselnde Wahl noch vorbehalten wollen. Die Gl. (1) geht dadurch, wenn wir durch $[(\mu+m)!]^q G^{\mu+m}$ dividieren und die Summanden in umgekehrter Reihenfolge schreiben, über in

$$p_m^*(\mu)\, x_\mu + p_{m-1}^*(\mu)\, x_{\mu+1} + \cdots + p_1^*(\mu)\, x_{\mu+m-1} + x_{\mu+m} = 0, \tag{5}$$

wobei

$$p_i^*(\mu) = A_i G^{-i} \mu^{k_i - iq} + o(\mu^{k_i - iq}).$$

Wählen wir nun insbesondere $q = q_\lambda$ und dividieren die Gl. (5) durch

$$\mu^{k_{e_\lambda} - e_\lambda q_\lambda},$$

so geht sie über in

$$p_m^{**}(\mu)\, x_\mu + p_{m-1}^{**}(\mu)\, x_{\mu+1} + \cdots + p_1^{**}(\mu)\, x_{\mu+m-1} + p_0^{**}(\mu)\, x_{\mu+m} = 0, \tag{6}$$

wobei nun

$$p_i^{**}(\mu) = A_i G^{-i} \mu^{(k_i - iq_\lambda) - (k_{e_\lambda} - e_\lambda q_\lambda)} + o(\mu^0) \qquad (\text{mit } A_0 = 1)$$

ist. Insbesondere ist also $p_i^{**}(\mu) = o(\mu^0)$ für alle i, bei denen $k_i - iq_\lambda < k_{e_\lambda} - e_\lambda q_\lambda$ ist, also insbesondere für $i < e_\lambda$ und für $i > e_{\lambda+1}$; dagegen ist

$$p_i^{**}(\mu) = A_i G^{-i} + o(\mu^0) \qquad \text{für} \qquad k_i - iq_\lambda = k_{e_\lambda} - e_\lambda q_\lambda,$$

also insbesondere für $i = e_\lambda$ und $i = e_{\lambda+1}$.

Nunmehr können wir die Differenzengleichung (6) mit der Summengleichung (3) identifizieren. Dabei wird dann $a_\nu = 0$, $b_{\mu\nu} = 0$ für $\nu > m$, während für $\nu \leqq m$ noch immer $b_{\mu\nu} = o(\mu^0)$ wird, also für *alle* ν etwa $|b_{\mu\nu}| \leqq k_\mu (\frac{1}{2})^\nu$ mit $\lim_{\mu\to\infty} k_\mu = 0$, wie in Satz B verlangt. Die Funktion $F(z)$ von Satz B aber wird diese:

$$\sum_i^{(\lambda)} A_i G^{-i} z^{m-i},$$

wo sich die Summe $\sum^{(\lambda)}$ über dieselben Werte i erstreckt wie in (2). Die Gleichung $F(z) = 0$ ist daher vom Grad $m - e_\lambda$, und ihre Wurzeln sind, wenn man G groß genug wählt, sämtlich absolut $\leqq 1$. Nach Satz B gibt es daher $m - e_\lambda$

linear unabhängige Lösungen, für welche $\overline{\lim}\sqrt[\mu]{|x_\mu|} \leqq 1$ ist, was nach (4) mit $q = q_\lambda$ soviel besagt wie

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{|D_\mu|\,(\mu!)^{-q_\lambda}} \leqq G,$$

und daraus folgt dann

$$\underline{\lim_{\mu\to\infty}} \frac{\log\left|\frac{1}{D_\mu}\right|}{\log(\mu!)} \geqq -q_\lambda.$$

Ebenso gibt es $m - e_{\lambda+1}$ linear unabhängige Lösungen, für welche sogar

$$\underline{\lim_{\mu\to\infty}} \frac{\log\left|\frac{1}{D_\mu}\right|}{\log(\mu!)} \geqq -q_{\lambda+1}$$

ist. Diese sind natürlich unter den $m - e_\lambda$ vorhin gewonnenen mit dabei, so daß man noch $e_{\lambda+1} - e_\lambda$ linear unabhängige Lösungen hat, für die

$$-q_\lambda \leqq \underline{\lim_{\mu\to\infty}} \frac{\log\left|\frac{1}{D_\mu}\right|}{\log(\mu!)} < -q_{\lambda+1}$$

ist. Dabei kann aber links nur das Gleichheitszeichen gelten. Denn wenn man in (4) für q den Wert $q_\lambda - \varepsilon$ mit beliebig kleinem ε wählt, so zeigt eine analoge Analyse, daß es auch nur $m - e_{\lambda+1}$ linear unabhängige Lösungen gibt, für die

$$\underline{\lim_{\mu\to\infty}} \frac{\log\left|\frac{1}{D_\mu}\right|}{\log(\mu!)} \geqq -q_\lambda + \varepsilon$$

ist, und das sind natürlich diejenigen, für welche der $\underline{\lim}$ sogar $\geqq -q_{\lambda+1}$ wird, so daß er nicht $< -q_{\lambda+1}$ sein kann. Bei dieser Wahl von q wird die Gleichung $F(z) = 0$ nämlich vom Grad $m - e_{\lambda+1}$ und hat lauter verschwindende Wurzeln. Damit ist der erste Teil von Satz A vollständig bewiesen.

Zum Beweis des zweiten Teiles von Satz A wählen wir in (4) wieder $q = q_\lambda$, aber $G = \sigma_l$. Dann wird

$$F(z) = \sum_i^{(\lambda)} A_i \sigma_l^{-i} z^{m-i}.$$

Die Gleichung $F(z) = 0$ ist also wieder vom Grad $m - e_\lambda$ und hat $m - e_{\lambda+1}$ verschwindende Wurzeln, außerdem aber noch $j_1 + j_2 + \cdots + j_l$ weitere Wurzeln, deren Betrag $\leqq 1$ ist. Nach Satz B gibt es also

$$m - e_{\lambda+1} + j_1 + j_2 + \cdots + j_l$$

linear unabhängige Lösungen, für die $\overline{\lim}\sqrt[\mu]{|x_\mu|} \leqq 1$ ist, was wegen (4) mit $q = q_\lambda$ und $G = \sigma_l$ soviel besagt wie

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{|D_\mu|\,(\mu!)^{-q_\lambda}} \leqq \sigma_l.$$

Entsprechend gibt es auch $m-e_{\lambda+1}+j_1+j_2+\cdots+j_{l-1}$ linear unabhängige Lösungen, für die sogar

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}}\sqrt[\mu]{|D_\mu|(\mu!)^{-q_\lambda}}\leqq\sigma_{l-1}$$

ist. Diese sind natürlich unter den $m-e_{\lambda+1}+j_1+\cdots+j_l$ vorhin gewonnenen mit dabei, so daß man noch j_l linear unabhängige Lösungen hat, für die

$$\sigma_{l-1}<\overline{\lim_{\mu\to\infty}}\sqrt[\mu]{|D_\mu|(\mu!)^{-q_\lambda}}\leqq\sigma_l$$

ist. Dabei kann aber rechts nur das Gleichheitszeichen gelten. Denn wenn man für G den Wert $\sigma_l-\varepsilon$ mit beliebig kleinem ε wählt, so zeigt eine analoge Analyse, daß es auch nur $m-e_{\lambda+1}+j_1+\cdots+j_{l-1}$ linear unabhängige Lösungen gibt, für die

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}}\sqrt[\mu]{|D_\mu|(\mu!)^{-q_\lambda}}\leqq\sigma_l-\varepsilon$$

ist, und das sind natürlich diejenigen, für welche der $\overline{\lim}$ sogar $\leqq\sigma_{l-1}$ wird, so daß er nicht $>\sigma_{l-1}$ sein kann. Damit ist auch der zweite Teil von Satz A bewiesen.

§ 3. Die spezielle Differentialgleichung

$$y^{(m)}+\sum_{i=1}^{m}(a_{i0}+a_{i1}x+\cdots+a_{i,m-i}x^{m-i})\,y^{(m-i)}=0$$

Integriert man diese Gleichung durch den Ansatz

$$y=D_0+D_1x+D_2x^2+\cdots,$$

so ergibt sich für die Koeffizienten D_μ die Differenzengleichung m-ter Ordnung

$$(7)\quad(\mu+m)(\mu+m-1)\ldots(\mu+1)D_{\mu+m}+f_1(\mu)D_{\mu+m-1}+\cdots+f_m(\mu)D_\mu=0$$

für $\mu=0,1,2,\ldots$. Dabei sind die $f_k(\mu)$ Polynome höchstens $(m-1)$-ten Grades von μ, nämlich

$$f_k(\mu)=\sum_{i=1}^{k}a_{i,k-i}(\mu-k+m)(\mu-k+m-1)\ldots(\mu-k+i+1)\quad\text{für } k<m,$$

$$f_m(\mu)=\sum_{i=1}^{m-1}a_{i,m-i}\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-m+i+1)+a_{m0}.$$

Wenn $f_m(\mu)$ für keinen der Werte $\mu=0,1,2,\ldots$ verschwindet, so ist die Gl. (7) nach Division durch $(\mu+m)(\mu+m-1)\ldots(\mu+1)$ eine Differenzengleichung von der Form (1) in Satz A. Der NP-Streckenzug hängt von den Graden der $f_k(\mu)$ ab und diese von dem Verschwinden oder Nichtverschwinden gewisser $a_{i,k-i}$; er kann in jedem Fall leicht aufgezeichnet werden. Ebenso können die zu den verschiedenen Strecken gehörigen Gleichungen $F(z)=0$ sofort hingeschrieben werden.

Ist zum Beispiel $a_{1,m\ 1} \neq 0$, so ist $f_m(\mu)$ vom Grad $m-1$, und zwar gleich $a_{1,m-1} \cdot \mu^{m-1} + o(\mu^{m-1})$. Der NP-Streckenzug besteht nur aus der einen Strecke von P_0 nach P_m. Ihr Richtungskoeffizient ist $-1/m$ und die zugehörige Gleichung $F(z) = 0$ lautet $z^m + a_{1,m\ 1} = 0$. Also haben alle Integrale der Differentialgleichung die Koeffizientenordnung $\varrho = 1/m$ und den zugehörigen Typus $\sigma = |a_{1,m-1}|^{1/m}$. Ist dagegen $a_{1,m-1} = 0$ und etwa auch $a_{2,m-2} = 0$, $a_{1,m-2} = 0$, aber $a_{3,m-3} \neq 0$, $a_{1,m-3} \neq 0$, dann ist

$$f_m(\mu) = a_{3,m-3} \cdot \mu^{m-3} + o(\mu^{m-3}),$$
$$f_{m-1}(\mu) = a_{2,m-3} \cdot \mu^{m-2} + o(\mu^{m-2}),$$
$$f_{m-2}(\mu) = a_{1,m-3} \cdot \mu^{m-1} + o(\mu^{m-1}).$$

Der NP-Streckenzug besteht aus zwei Strecken: eine von P_0 nach P_{m-2} mit dem Richtungskoeffizienten $-1/(m-2)$ und eine von $P_{m\ 2}$ nach P_m mit dem Richtungskoeffizienten -1. Die zur ersten Strecke gehörige Gleichung $F(z) = 0$ lautet $z^m + a_{1,m-3} z^2 = 0$, die zur zweiten Strecke gehörige lautet $a_{1,m-3} z^2 + a_{2,m\ 3} z + a_{3,m-3} = 0$. Daher gibt es $m-2$ Integrale von der Koeffizientenordnung $1/(m-2)$ und dem zugehörigen Typus $|a_{1,m-3}|^{1/(m-2)}$, außerdem zwei Integrale von der Koeffizientenordnung 1 und den zugehörigen Typen

$$\left| \frac{-a_{2,m-3} \pm \sqrt{a_{2,m-3}^2 - 4\, a_{1,m-3} \cdot a_{3,m-3}}}{2\, a_{1,m-3}} \right|,$$

die voneinander verschieden oder auch einander gleich sein können.

§ 4. Der allgemeine Fall

Wenn die Koeffizienten der Differentialgleichung

$$y^{(m)} + P_1(x)\, y^{(m-1)} + \cdots + P_m(x)\, y = 0 \tag{8}$$

nicht die spezielle Form des vorigen Paragraphen haben, wenn also $P_i(x)$ für wenigstens ein i von höherem als dem $(m-i)$-ten Grad ist und man integriert wieder durch die Reihe $y = D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \cdots$, so wird die Differenzengleichung für die D_μ von höherer als der m-ten Ordnung, etwa von der Ordnung $m+k$:

$$\begin{aligned}(9)\quad &(\mu+m)\ldots(\mu+1)\, D_{\mu+m} + \\ &+ f_1(\mu)\, D_{\mu+m-1} + \cdots + f_m(\mu)\, D_\mu + \cdots + f_{m+k}(\mu)\, D_{\mu-k} = 0\end{aligned}$$

für $\mu = 0, 1, 2, \ldots$. Dabei ist $D_{-1} = D_{-2} = \cdots = D_{-k} = 0$ zu setzen.

Die Differenzengleichung (9) hat nun, wenn $f_{m+k}(\mu)$ für kein μ verschwindet, $m+k$ linear unabhängige Lösungen und aus dem zugehörigen NP-Streckenzug kann man Ordnung und Typus bestimmen. Aber diese können für die Differentialgleichung nicht alle in Frage kommen, weil sie ja nicht $m+k$, sondern

nur m Integrale hat. Nur bei m Lösungen der Differenzengleichung werden $D_{-1}, D_{-2}, \ldots$ und D_{k} verschwinden; nur diese m Lösungen liefern Integrale der Differentialgleichung und man kann nicht allgemein sagen, für *welche* Ordnungen und Typen das zutrifft. Einige Spezialfälle dieser Art sind von Wittich **1**, **2** und Pöschl **1**, **2**, **3** auf anderem Weg untersucht worden.

Man kann nun aber neben der homogenen Differentialgleichung (8) auch die inhomogene betrachten:

$$y^{(m)} + P_1(x)\, y^{(m-1)} + \cdots + P_m(x)\, y = H(x), \tag{10}$$

wo $H(x)$ ein Polynom vom Grad $k-1$ oder kleinerem ist:

$$H(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \cdots + h_{k-1} x^{k-1}.$$

Löst man diese wieder durch den Ansatz $y = D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \cdots$, so kommt für die D_μ die gleiche Rekursionsformel (9) mit dem Unterschied, daß auf der rechten Seite für $\mu < k$ nicht 0, sondern h_μ steht. Betrachtet man nun die Differenzengleichung (9) nur für $\mu \geqq k$, so hat sie $m+k$ linear unabhängige Lösungen $D_0, D_1, D_2, \ldots$ mit den aus dem NP-Streckenzug sich ergebenden Ordnungen und Typen. Setzt man eine solche Lösung in die Gln. (9) mit $\mu < k$ und rechts h_μ statt 0 ein, so erhält man daraus die h_μ, also das Polynom $H(x)$, für welches die Reihe ein Integral der Gl. (10) ist. Bei m Lösungen der Differenzengleichung (9) für $\mu \geqq k$ werden sich dabei lauter verschwindende h_μ ergeben, so daß man Integrale der homogenen Differentialgleichung bekommt. Aber für *welche* Lösungen das eintritt, kann man nicht ohne weiteres entscheiden.

Man kann sich die gleiche Sache auch so überlegen: Betrachtet man statt der Gl. (8) die k-mal differenzierte Gleichung

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[y^{(m)} + P_1(x)\, y^{(m-1)} + \cdots + P_m(x)\, y\right] = 0, \tag{11}$$

so hat diese die spezielle Form des § 3 und man kann wie dort die Ordnungen und zugehörigen Typen bestimmen. Aber man hat dann eben nicht die Gl. (8), sondern die Gl. (11) integriert, und aus (11) folgt nicht (8), sondern nur (10).

Ein Wort wäre noch zu sagen über den bisher ausgeschlossenen Fall, daß das Polynom $f_m(\mu)$ in Gl. (7) bzw. $f_{m,k}(\mu)$ in (9) für einige Werte von μ verschwindet oder vielleicht sogar für alle μ, so daß die Differenzengleichung von geringerer Ordnung wird. Man sieht leicht, daß dann die Gleichung des § 3 bzw. die Gl. (10) mit passendem $H(x)$ wenigstens ein Integral hat, das ein Polynom von x ist. Aber für die transzendenten Integrale sind Ordnung und Typus stets durch den NP-Streckenzug gegeben, und zwar kommen alle aus dem Streckenzug und den zugehörigen Gleichungen $F(z) = 0$ resultierenden Ordnungen und Typen wirklich vor, sofern man neben der homogenen auch die inhomogene Differentialgleichung betrachtet.

Literatur

Kreuser, P.: **1**. Über das Verhalten der Integrale homogener linearer Differenzengleichungen im Unendlichen. Diss. Tübingen 1914.

Perron, O.: **1**. Über lineare Differenzengleichungen. Acta math., Stockh. **34**, 109—137 (1910). — **2**. Über lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten. Acta math., Stockh. **34**, 139—163 (1910). — **3**. Über Summengleichungen und Poincarésche Differenzengleichungen. Math. Ann. **84**, 1—15 (1921).

Pöschl, K.: **1**. Zur Frage des Maximalbetrags der Lösungen linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Polynomkoeffizienten. Math. Ann. **125**, 344—349 (1953). — **2**. Über Anwachsen und Nullstellenverteilung der ganzen transzendenten Lösungen linearer Differentialgleichungen. I. J. reine angew. Math. **199**, 121—138 (1958). — **3**. Über Anwachsen und Nullstellenverteilung der ganzen transzendenten Lösungen linearer Differentialgleichungen. II. J. reine angew. Math. **200**, 129—139 (1958).

Wittich, H.: **1**. Ganze transzendente Lösungen algebraischer Differentialgleichungen. Math. Ann. **122**, 221—234 (1950). — **2**. Über das Anwachsen der Lösungen linearer Differentialgleichungen. Math. Ann. **124**, 277—288 (1952).

München 27, Friedrich-Herschel-Straße 11

(Eingegangen am 18. Oktober 1958)

Brauer, R.
Math. Zeitschr. 72, 25—46 (1959)

Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung. II

Leon Lichtenstein zum Gedächtnis

Von
Richard Brauer

§ 1. Einleitung[1]

In Fortführung der Untersuchungen des ersten Teils[2]) betrachten wir die Blöcke von Charakteren einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ für eine fest gewählte Primzahl p. In § 2 werden in Erweiterung der Ergebnisse von I Beziehungen zwischen Blöcken von $\mathfrak{G}$ und Blöcken geeigneter Untergruppen von $\mathfrak{G}$ hergeleitet.

Sind $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ die gewöhnlichen irreduziblen Charaktere von $\mathfrak{G}$ und sind $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ die irreduziblen modularen Charaktere von $\mathfrak{G}$, so gelten nach I (3.5) für p-reguläre Elemente $G \in \mathfrak{G}$ die Gleichungen

$$\chi_i(G) = \sum_j d_{ij} \varphi_j(G), \tag{1.1}$$

wo die d_{ij} die Zerlegungszahlen von $\mathfrak{G}$ (für p) sind. Man erhält ohne Schwierigkeit ähnliche Formeln für p-singuläre Elemente von $\mathfrak{G}$, wobei aber rechts anstelle der φ_j die irreduziblen modularen Charaktere gewisser Untergruppen $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_r$ von $\mathfrak{G}$ auftreten (§ 3). Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit (§ 6) besagt, daß, wenn man in den verallgemeinerten Formeln (1.1) den Charakter χ_i in einem festen Block B wählt, rechts nur die modularen Charaktere $\varphi_j^{(\varrho)}$ gewisser B zugeordneter Blöcke der Gruppen $\mathfrak{N}_\varrho$ auftreten können. Die Gesamtzahl dieser $\varphi_j^{(\varrho)}$ ist gleich der Zahl $\varkappa$ der Charaktere χ_i in B, und die in den Formeln auftretende Matrix der Koeffizienten ist quadratisch vom Grade $\varkappa$, nicht-singulär, und die Determinante ist im wesentlichen eine Potenz von p. Für die genaue Formulierung muß auf § 6 und § 7 verwiesen werden. In § 4 werden einige Hilfsbetrachtungen über Klassenalgebren gegeben, § 5 ist dem Beweis einiger Hilfssätze gewidmet. Schließlich werden in § 7 eine Reihe von Folgerungen gegeben.

Die Bezeichnungen sind wie in I gewählt. Hier sei nur erwähnt, daß Ω ein die g-ten Einheitswurzeln enthaltender algebraischer Zahlkörper endlichen Grades ist, wo $g = (\mathfrak{G}:1)$ die Ordnung von $\mathfrak{G}$ bezeichnet. Es sei v eine Erweiterung der p-adischen exponentiellen Bewertung der rationalen Zahlen auf Ω,

[1]) This research was supported in part by the United States Air Force under Contract No. AF 49 (638)-287 monitored by the AF Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command.

[2]) Die erste Mitteilung ist in der Math. Z. **63**, 406—444 (1956) erschienen; sie wird im folgenden mit I zitiert.

$v(p)=1$; es sei $\mathfrak{o}_v$ der Ring der für v ganzen Zahlen von Ω, $\mathfrak{p}_v$ das zugehörige Primideal und schließlich

$$\Omega^* = \mathfrak{o}_v/\mathfrak{p}_v$$

der Restklassenkörper.

Schreiben wir eine Matrix $A=(a_{ij})$, so ist *stets* der Zeilenindex mit i, der Spaltenindex mit j bezeichnet. Der Wertebereich der Indizes i und j ist in der Regel aus dem Zusammenhang zu entnehmen. Ist z.B. $R_1, R_2, \ldots, R_l$ ein Vertretersystem für die p-regulären Klassen von $\mathfrak{G}$, so ist $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_j(R_i))$ die Matrix l-ten Grades der irreduziblen modularen Charaktere von $\mathfrak{G}$.

Wir geben hier noch eine Ergänzung zu der in I § 3 entwickelten Theorie der modularen Charaktere. Es sei $(n(R_i)\delta_{ij})=N$ die aus den Ordnungen $n(R_i)$ der Normalisatoren $\mathfrak{N}(R_i)$ der Elemente R_i gebildete Diagonalmatrix. Es sei $C=(c_{ij})$ die Matrix der Cartanschen Invarianten von $\mathfrak{G}$, vgl. I (3.8). Aus I (3 G) folgt dann

$$\overline{\boldsymbol{\varphi}}' C \boldsymbol{\varphi} = N, \tag{1.2}$$

also

$$C\boldsymbol{\varphi} N^{-1}\overline{\boldsymbol{\varphi}}' = E = (\delta_{ij}). \tag{1.3}$$

Ich benütze die Gelegenheit, einige Ungenauigkeiten in I zu berichtigen. Auf S. 416, Zeile 21 ersetze man Z durch Z^*. Auf S. 423, Zeile 17 ist vor „Elementarteiler" das Wort „anderen" hinzuzufügen. Herr H. WIELANDT macht mich darauf aufmerksam, daß beim Beweis von (6E) die Elementarteiler in bezug auf den Ring der ganzen rationalen Zahlen zu nehmen sind (vgl. dazu Anmerkung [9]) von I). Auf S. 427, Zeile 6 muß das Wort „eineindeutig" gestrichen werden. In (11.1) ist die Summe durch $\sum_{\varrho=1}^{r}\vartheta_\varrho$ zu ersetzen. Auf S. 434, Zeile 27 muß es $\overline{B}$ anstatt B heißen. Auf S. 435, Zeile 2 werde das Wort „Darstellung" durch „Charakter" ersetzt. Auf S. 436, Zeile 17 streiche man die Worte „und daß die Ordnung von $\overline{\mathfrak{N}}(\overline{T}_j)$ zu p teilerfremd ist". Die Beziehung (11.9) muß $v(T_j)\geqq d$ lauten, in (11.10) werde die Summe durch $\sum_{\varrho=1}^{r}\vartheta_\varrho(W)$ ersetzt und in der folgenden Zeile muß es $v(g/x_i)-v(T_j)\leqq 0$ (anstelle von Gleichheit) heißen. Auf S. 437 muß die Zeile 14 ersetzt werden durch „Block, und ist χ_i ein Charakter von B, dessen Kern $\mathfrak{D}$ enthält, so ist für Elemente $W:\mathfrak{W}:$". Schließlich füge man auf S. 437, Zeile 29 vor $\tilde{\chi}_j$ das Wort „geeignetes" hinzu.

§ 2. Beziehungen zwischen Blöcken von $\mathfrak{G}$ und Blöcken von Untergruppen

Wie in I § 2 sei $Z(\mathfrak{G}, \Xi)$ die Klassenalgebra der Gruppe $\mathfrak{G}$ über dem beliebigen Körper Ξ. Sind $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_k$ die Klassen konjugierter Elemente von $\mathfrak{G}$ und setzt man

$$K_\alpha = \sum_{\sigma\in\mathfrak{K}_\alpha}\sigma \qquad (\text{für } \alpha=1,2,\ldots,k),$$

so ist $Z(G, \Xi)$ ein Vektorraum mit der Basis $K_1, K_2, \ldots, K_k$. Es ist klar, was man unter einer *linearen Funktion* f in $Z(\mathfrak{G}, \Xi)$ zu verstehen hat. Dabei ist f eindeutig durch die Werte $f(K_1), f(K_2), \ldots, f(K_k)$ bestimmt, und man kann diese k Werte als beliebige k Elemente von Ξ vorschreiben.

Es sei $\widetilde{\mathfrak{G}}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Wir verwenden für $\widetilde{\mathfrak{G}}$ durchgehend dieselben Bezeichnungen wie für $\mathfrak{G}$ unter Hinzufügung eines $\sim$-Zeichens. So werden z.B. die Klassen von $\widetilde{\mathfrak{G}}$ mit $\widetilde{\mathfrak{K}}_1, \widetilde{\mathfrak{K}}_2, \ldots$ bezeichnet. Ist h eine lineare Funktion in $Z(\widetilde{\mathfrak{G}}, \Xi)$, so definieren wir eine mit $h^{\mathfrak{G}}$ bezeichnete lineare Funktion in $Z(\mathfrak{G}, \Xi)$ durch die Festsetzung

$$h^{\mathfrak{G}}(K_\alpha) = \sum_{\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta \subseteq \mathfrak{K}_\alpha} h(\widetilde{K}_\beta), \tag{2.1}$$

wo also $\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta$ die in $\mathfrak{K}_\alpha$ enthaltenen Klassen von $\widetilde{\mathfrak{G}}$ durchläuft. Ist $\mathfrak{A}$ eine zwischen $\mathfrak{G}$ und $\widetilde{\mathfrak{G}}$ gelegene Gruppe, so ist offenbar

$$(h^{\mathfrak{A}})^{\mathfrak{G}} = h^{\mathfrak{G}}. \tag{2.2}$$

Wir wählen jetzt $\Xi = \Omega^*$. Dann hat man eine eineindeutige Zuordnung zwischen den linearen Charakteren $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_t$ von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$ (d.h. zwischen den Algebra-Homomorphismen ψ_τ von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$ auf Ω^*) und den p-Blöcken $B_1, B_2, \ldots, B_t$ von $\mathfrak{G}$.

Es sei $\tilde{\psi}$ ein linearer Charakter von $Z(\widetilde{\mathfrak{G}}, \Omega^*)$, der zu dem p-Block $\widetilde{B}$ von $\widetilde{\mathfrak{G}}$ gehöre. Ist dann $\psi = \tilde{\psi}^{\mathfrak{G}}$ ein linearer Charakter von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$, so gehört ψ zu einem p-Block B von $\mathfrak{G}$. Dann wollen wir

$$B = \widetilde{B}^{\mathfrak{G}}$$

schreiben. Es ist aber zu beachten, daß ψ kein linearer Charakter von $\mathfrak{G}$ zu sein braucht, so daß $\widetilde{B}^{\mathfrak{G}}$ nicht immer definiert ist.

(2A) *Es sei $\mathfrak{Q}$ eine p-Untergruppe von $\mathfrak{G}$, es sei $\mathfrak{T} = \mathfrak{C}(\mathfrak{Q})$ der Zentralisator von $\mathfrak{Q}$ und es sei $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe des Normalisators $\mathfrak{N}(\mathfrak{Q})$ von $\mathfrak{Q}$, derart daß $\mathfrak{H} \supseteq \mathfrak{Q}\mathfrak{T}$ ist. Ist $\widetilde{B}$ ein Block von $\mathfrak{H}$, so ist der p-Block $B = \widetilde{B}^{\mathfrak{G}}$ stets definiert und es ist B gerade der $\widetilde{B}$ nach* I(7E) *zugeordnete Block von* $\mathfrak{G}$).

Beweis. Man wähle $\widetilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{H}$. Ist $\tilde{\psi}$ der zu $\widetilde{B}$ gehörige lineare Charakter von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$, so zeigt Vergleich von (2.1) für $h = \tilde{\psi}$ mit I (7.3), daß es genügt $\tilde{\psi}(\widetilde{K}_\beta) = 0$ für diejenigen Klassen $\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta$ von $\widetilde{\mathfrak{G}}$ zu zeigen, die nicht in $\mathfrak{T}$ liegen. Da $\mathfrak{T} \lhd \widetilde{\mathfrak{G}}$ ist (d.h. $\mathfrak{T}$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$), ist dann $\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta \cap \mathfrak{T} = \emptyset$. Wäre nun $\tilde{\psi}(\widetilde{K}_\beta) \neq 0$, so würde aus I(8A) folgen, daß der Zentralisator $\widetilde{\mathfrak{N}}(\widetilde{G})$ eines Elementes $\widetilde{G} \in \widetilde{\mathfrak{K}}_\beta$ in $\widetilde{\mathfrak{G}}$ eine Defektgruppe $\widetilde{\mathfrak{D}}$ von $\widetilde{B}$ enthält. Wegen I(9F) gilt $\mathfrak{Q} \subseteq \widetilde{\mathfrak{D}}$. Also folgt $\widetilde{G} \in \mathfrak{C}(\widetilde{\mathfrak{D}}) \subseteq \mathfrak{C}(\mathfrak{Q}) = \mathfrak{T}$, was einen Widerspruch ergibt.

Aus (2A) ergibt sich, daß die Zuordnung $\widetilde{B} \to B$ in I(7E) nicht von $\mathfrak{Q}$ abhängt, falls $\mathfrak{H}$ die Voraussetzungen für verschiedene Wahlen von $\mathfrak{Q}$ erfüllt.

(2B) *Ist $\widetilde{B}$ ein Block einer beliebigen Untergruppe $\widetilde{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$ und ist $\widetilde{B}^{\mathfrak{G}}$ definiert, so kann die Defektgruppe $\mathfrak{D}$ von B so gewählt werden, daß sie eine gegebene Defektgruppe $\widetilde{\mathfrak{D}}$ von $\widetilde{B}$ enthält.*

Dies kann in derselben Weise wie I(8D) bewiesen werden.

Aus (2.2) ergibt sich:

(2C) *Es seien $\mathfrak{A}$ und $\widetilde{\mathfrak{G}}$ zwei Untergruppen von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{A} \geqq \widetilde{\mathfrak{G}}$ und es sei $\widetilde{B}$ ein Block von $\widetilde{\mathfrak{G}}$. Sind $\widetilde{B}^{\mathfrak{A}}$ und $\widetilde{B}^{\mathfrak{G}}$ definiert, so ist $(\widetilde{B}^{\mathfrak{A}})^{\mathfrak{G}}$ definiert und $(\widetilde{B}^{\mathfrak{A}})^{\mathfrak{G}} = \widetilde{B}^{\mathfrak{G}}$. Sind $\widetilde{B}^{\mathfrak{A}}$ und $(\widetilde{B}^{\mathfrak{A}})^{\mathfrak{G}}$ definiert, so ist $\widetilde{B}^{\mathfrak{G}}$ definiert.*

Weiterhin zeigen wir:

(2D) *Es sei B ein Block von $\mathfrak{G}$ mit der Defektgruppe $\mathfrak{D}$. Im Sinne von* I(12A) *werde B die Klasse $\{\vartheta\}$ von in $\mathfrak{N}(\mathfrak{D})$ assoziierten Charakteren von $\mathfrak{D}\mathfrak{C}(\mathfrak{D})$ zugeordnet. Liegt ϑ im Block $\widetilde{B}$ von $\mathfrak{D}\mathfrak{C}(\mathfrak{D})$, so ist $B = \widetilde{B}^{\mathfrak{G}}$. Auch $\widetilde{B}$ hat die Defektgruppe $\mathfrak{D}$.*

Beweis. Es sei $\chi_i \in B$. Aus I(12.2) ergibt sich, daß der zu χ_i gehörige lineare Charakter ω_i von $Z(\mathfrak{G}, \Omega)$ die Kongruenz

$$\omega_i(G) \equiv \frac{1}{\vartheta(1)} \sum_T \vartheta(T) \pmod{\mathfrak{p}_\nu}$$

erfüllt, wo T die Elemente der Klasse $\mathfrak{K}_\alpha$ von G durchläuft, die in $\mathfrak{C}(\mathfrak{D})$ liegen. Ist also $\tilde{\omega}$ der zu ϑ gehörige lineare Charakter von $Z(\mathfrak{D}\mathfrak{C}(\mathfrak{D}), \Omega)$, so ist

$$\omega_i(K_\alpha) \equiv \sum_{\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta \subseteq \mathfrak{K}_\alpha} \tilde{\omega}(\widetilde{K}_\beta) \pmod{\mathfrak{p}_\nu}, \tag{2.3}$$

wo hier die Bezeichnung $\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta$ für die Klassen von $\widetilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{D}\mathfrak{C}(\mathfrak{D})$ verwendet ist. Entspricht B dem linearen Charakter ψ von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$ und $\widetilde{B}$ dem linearen Charakter $\tilde{\psi}$ von $Z(\widetilde{\mathfrak{G}}, \Omega^*)$, so führt die Restklassenabbildung ω_i in ψ und χ_i in $\tilde{\psi}$ über. Jetzt zeigt (2.3), daß $\psi = \tilde{\psi}^{\mathfrak{G}}$, also $B = \widetilde{B}^{\mathfrak{G}}$ ist. Da $\mathfrak{D} \lhd \mathfrak{D}\mathfrak{C}(\mathfrak{D})$ ist, zeigt I(9F), daß $\mathfrak{D}$ in der Defektgruppe $\widetilde{\mathfrak{D}}$ von $\widetilde{B}$ enthalten ist. Dann folgt aus (2B), daß $\mathfrak{D} = \widetilde{\mathfrak{D}}$ ist.

Jetzt können wir (2A) folgendermaßen verallgemeinern:

(2E) *Es sei $\widetilde{\mathfrak{G}}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und $\widetilde{B}$ ein Block von $\widetilde{\mathfrak{G}}$ mit der Defektgruppe $\widetilde{\mathfrak{D}}$. Enthält $\widetilde{\mathfrak{G}}$ den Zentralisator $\mathfrak{C}(\widetilde{\mathfrak{D}})$ von $\widetilde{\mathfrak{D}}$ in $\mathfrak{G}$, so ist $\widetilde{B}$ definiert.*

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt, daß $\mathfrak{C}(\widetilde{\mathfrak{D}})$ auch der Zentralisator von $\widetilde{\mathfrak{D}}$ in $\widetilde{\mathfrak{G}}$ ist. Wendet man (2D) auf $\widetilde{\mathfrak{G}}$ und $\widetilde{B}$ an, so folgt, daß es einen Block $B^{\#}$ von $\widetilde{\mathfrak{D}}\mathfrak{C}(\widetilde{\mathfrak{D}})$ gibt, für den $\widetilde{B} = (B^{\#})^{\widetilde{\mathfrak{G}}}$ gilt. Andererseits ist $(B^{\#})^{\mathfrak{G}} = B$ nach (2A) definiert. Aus (2C) folgt, daß $\widetilde{B}^{\mathfrak{G}}$ definiert und gleich B ist.

Sind $\widetilde{B}$ und B wie in (2B) gewählt, so ergibt sich für die Defekte $\tilde{d}$ und d die Ungleichung

$$\tilde{d} \leqq d. \tag{2.4}$$

Wir behandeln einen Fall, in dem (2.4) verschärft werden kann:

(2F) *Es sei $\mathfrak{Q}$ eine p-Untergruppe von $\mathfrak{G}$, und es sei $\widetilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{Q}\mathfrak{C}(\mathfrak{Q})$. Es sei $\tilde{\chi}$ ein irreduzibler Charakter von $\widetilde{\mathfrak{G}}$ und $\mathfrak{S}$ seine Trägheitsgruppe in $\mathfrak{N}(\mathfrak{Q})$, und es sei $\varrho = \nu(\mathfrak{S}:\widetilde{\mathfrak{G}})$. Gehört $\tilde{\chi}$ zu dem Block $\widetilde{B}$ von $\widetilde{\mathfrak{G}}$ mit der Defektgruppe $\widetilde{\mathfrak{D}}$, so ist $B = \widetilde{B}^{\mathfrak{G}}$ definiert, und seine Defektgruppe $\mathfrak{D}$ kann so gewählt werden, daß $\mathfrak{D} \supseteq \widetilde{\mathfrak{D}}$ und $(\mathfrak{D} \cap \mathfrak{S} : \mathfrak{D} \cap \widetilde{\mathfrak{G}}) = p^{\varrho}$ ist. Hat B den Defekt d und $\widetilde{B}$ den Defekt $\tilde{d}$, so ist*

$$d \geqq \tilde{d} + \varrho. \tag{2.5}$$

Beweis. Da $\mathfrak{Q} \lhd \widetilde{\mathfrak{G}}$ ist, ist $\mathfrak{Q} \subseteq \widetilde{\mathfrak{D}}$, also $\mathfrak{C}(\widetilde{\mathfrak{D}}) \subseteq \mathfrak{C}(\mathfrak{Q}) \subseteq \widetilde{\mathfrak{G}}$. Daher ist $\widetilde{B}^{\mathfrak{G}} = B$ nach (2E) definiert.

Nach dem Sylowschen Satz gibt es eine Untergruppe $\mathfrak{A} \supseteq \widetilde{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{S}$ mit $(\mathfrak{A}:\widetilde{\mathfrak{G}}) = p^{\varrho}$. Wir nehmen zunächst an, daß $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}$ ist. Ist χ ein irreduzibler Charakter in B, ist ω der zu χ gehörige lineare Charakter von $Z(\mathfrak{G}, \Omega)$ und $\tilde{\omega}$ der zu $\tilde{\chi}$ gehörige lineare Charakter von $Z(\widetilde{\mathfrak{G}}, \Omega)$, so gilt für alle α

$$\omega(K_\alpha) \equiv \sum_{\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta \subseteq \mathfrak{K}_\alpha} \tilde{\omega}(\widetilde{K}_\beta) \pmod{\mathfrak{p}_\nu}. \tag{2.6}$$

Ist $X \in \mathfrak{G}$ und ist $\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta \subseteq \mathfrak{K}_\alpha$ eine Klasse von $\widetilde{\mathfrak{G}} \lhd \mathfrak{A} = \mathfrak{G}$, so ist $X^{-1}\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta X$ wieder eine Klasse $\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta^X \subseteq \mathfrak{K}_\alpha$ von $\widetilde{\mathfrak{G}}$. Da jetzt $\mathfrak{G}$ die Trägheitsgruppe von $\tilde{\chi}$ ist, gilt $\tilde{\omega}(\widetilde{K}_\beta) = \tilde{\omega}(\widetilde{K}_\beta^X)$. Die Elemente X mit $\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta^X = \widetilde{\mathfrak{K}}_\beta$ bilden eine Untergruppe $\mathfrak{N}_\beta \supseteq \widetilde{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$. Dann ist die Anzahl der verschiedenen $\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta^X$ gleich $(\mathfrak{G}:\mathfrak{N}_\beta)$, also ein Teiler von $(\mathfrak{G}:\widetilde{\mathfrak{G}}) = p^{\varrho}$ und daher eine Potenz von p. Es genügt also, $\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta$ in (2.6) über diejenigen Klassen laufen zu lassen, für die $\mathfrak{N}_\beta = \mathfrak{G}$ ist. Entweder gibt es kein derartiges $\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta$ und dann ist $\omega(K_\alpha) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}$, oder $\mathfrak{K}_\alpha$ stimmt mit einem derartigen $\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta$ überein und wir haben

$$\omega(K_\alpha) \equiv \tilde{\omega}(\widetilde{K}_\beta) \pmod{\mathfrak{p}_\nu}. \tag{2.7}$$

Aus der Definition der Defektgruppe $\mathfrak{D}$ von B ergibt sich, daß es Klassen $\mathfrak{K}_\alpha$ gibt, für die $\omega(K_\alpha) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}$ ist, und für die $\mathfrak{D}$ p-Sylowuntergruppe des Normalisators $\mathfrak{N}(Y)$ von Elementen Y von $\mathfrak{K}_\alpha$ ist. Dann muß also $\mathfrak{K}_\alpha$ eine Klasse $\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta$ von $\widetilde{\mathfrak{G}}$ sein. Insbesondere ist $Y \in \widetilde{\mathfrak{G}}$. Sind $n(Y)$ und $\tilde{n}(Y)$ die Ordnungen der Normalisatoren $\mathfrak{N}(Y)$ und $\widetilde{\mathfrak{N}}(Y) = \mathfrak{N}(Y) \cap \widetilde{\mathfrak{G}}$ von Y in $\mathfrak{G}$ und in $\widetilde{\mathfrak{G}}$, so folgt aus $\mathfrak{K}_\alpha = \widetilde{\mathfrak{K}}_\beta$, daß $g/n(Y) = \tilde{g}/\tilde{n}(Y)$ ist. Wegen $(\mathfrak{G}:\widetilde{\mathfrak{G}}) = (\mathfrak{A}:\widetilde{\mathfrak{G}}) = p^{\varrho}$ ist also

$$n(Y) = p^{\varrho}\tilde{n}(Y). \tag{2.8}$$

Nach (2.7) ist $\tilde{\omega}(\widetilde{K}_\beta) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}$. Daher enthält $\widetilde{\mathfrak{N}}(Y)$ nach I (8A) eine Defektgruppe $\widetilde{\mathfrak{D}}$ von $\widetilde{B}$. Ersetzt man nötigenfalls $\mathfrak{D}$ durch eine Konjugierte, so kann man annehmen, daß $\widetilde{\mathfrak{D}}$ zu der Sylowgruppe $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{N}(Y)$ gehört.

Dann zeigt (2.8), daß $(\mathfrak{D}:\widetilde{\mathfrak{D}}) \geqq p^\varrho$ ist, daß also für die Defekte d und $\tilde{d}$ di Ungleichung $d \geqq \tilde{d} + \varrho$ gilt. Aus (2.8) folgt leicht, daß $(\mathfrak{D}:\mathfrak{D}\cap\widetilde{\mathfrak{G}}) = p^\varrho$ ist Da $\mathfrak{D}\widetilde{\mathfrak{G}}/\widetilde{\mathfrak{G}} \cong \mathfrak{D}/\mathfrak{D}\cap\widetilde{\mathfrak{G}}$ ist, haben wir $\mathfrak{G} = \mathfrak{D}\widetilde{\mathfrak{G}}$.

Kehren wir zu dem Fall eines beliebigen $\mathfrak{G} \geqq \mathfrak{A}$ zurück! Da $\widetilde{\mathfrak{G}} \geqq \mathfrak{C}(\widetilde{\mathfrak{D}})$ wa enthält $\widetilde{\mathfrak{G}}$ den Zentralisator $\mathfrak{C}(\widetilde{\mathfrak{D}})\cap\mathfrak{A}$ von $\widetilde{\mathfrak{D}}$ in $\mathfrak{A}$ und nach (2E) ist der Bloc $\hat{B} = \tilde{B}^{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{A}$ definiert. Wendet man die vorangehenden Betrachtunge auf $\mathfrak{A}$ anstelle von $\mathfrak{G}$ an, so zeigt sich, daß die Defektgruppe $\hat{\mathfrak{D}}$ von $\hat{B}$ s gewählt werden kann, daß sie $\widetilde{\mathfrak{D}}$ enthält und daß $(\hat{\mathfrak{D}}:\widetilde{\mathfrak{D}}) \geqq p^\varrho$ und $\mathfrak{A} = \hat{\mathfrak{D}}\widetilde{\mathfrak{G}}$ ist

Nach (2E) und (2C) ist $\hat{B}^{\mathfrak{G}}$ definiert und $\tilde{B}^{\mathfrak{G}} = \hat{B}^{\mathfrak{G}}$. Wegen (2B) kan die Defektgruppe $\mathfrak{D}$ von B so gewählt werden, daß $\mathfrak{D} \geqq \hat{\mathfrak{D}}$ ist. Daher is $(\mathfrak{D}:\widetilde{\mathfrak{D}}) \geqq p^\varrho$. Ferner haben wir $\hat{\mathfrak{D}} \leqq \mathfrak{D}\cap\mathfrak{S}$, also $\big((\mathfrak{D}\cap\mathfrak{S})\widetilde{\mathfrak{G}}:\widetilde{\mathfrak{G}}\big) \geqq (\hat{\mathfrak{D}}\widetilde{\mathfrak{G}}:\widetilde{\mathfrak{G}}) =$ $(\mathfrak{A}:\widetilde{\mathfrak{G}}) = p^\varrho$. Andererseits ist

$$\big((\mathfrak{D}\cap\mathfrak{S})\,\widetilde{\mathfrak{G}}:\widetilde{\mathfrak{G}}\big) = (\mathfrak{D}\cap\mathfrak{S}:\mathfrak{D}\cap\mathfrak{S}\cap\widetilde{\mathfrak{G}}) = (\mathfrak{D}\cap\mathfrak{S}:\mathfrak{D}\cap\widetilde{\mathfrak{G}}).$$

Dieser Index ist eine Potenz von p, die $(\mathfrak{S}:\widetilde{\mathfrak{G}})$ teilt und daher höchstens gleic p^ϱ ist. Also ist $(\mathfrak{D}\cap\mathfrak{S}:\mathfrak{D}\cap\widetilde{\mathfrak{G}}) = p^\varrho$. Damit ist (2F) bewiesen.

Wir behandeln noch den Zusammenhang zwischen den Blöcken vo $\mathfrak{Q}\mathfrak{C}(\mathfrak{Q})$ und denen von $\mathfrak{Q}\mathfrak{C}(\mathfrak{Q})/\mathfrak{Q}$.

(2G) *Ist $\mathfrak{Q}$ eine p-Untergruppe von $\mathfrak{G}$, ist $\widetilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{Q}\mathfrak{C}(\mathfrak{Q})$ und $\overline{\mathfrak{G}} = \widetilde{\mathfrak{G}}/\mathfrak{Q}$, s hat man eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Blöcken $\widetilde{B}$ von $\widetilde{\mathfrak{G}}$ und de Blöcken $\overline{B}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$. Ist dabei $\overline{\chi}$ ein irreduzibler Charakter von $\overline{\mathfrak{G}}$ in $\overline{B}$, so gehör $\overline{\chi}$ als Charakter von $\widetilde{\mathfrak{G}}$ betrachtet zu dem zugeordneten Block $\widetilde{B}$. Ist $\widetilde{\mathfrak{D}}$ die Defekt gruppe von $\widetilde{B}$, so kann die Defektgruppe von $\overline{B}$ als $\overline{\mathfrak{D}} = \widetilde{\mathfrak{D}}/\mathfrak{Q}$ gewählt werden*

Beweis. Aus I § 9 ergibt sich, daß jedem Block $\overline{B}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ ein Block $\widetilde{B}$ von $\widetilde{\mathfrak{G}}$ entspricht, derart daß wenn $\tilde{\chi}$ ein irreduzibler Charakter von $\overline{\mathfrak{G}}$ in $\overline{B}$ ist, $\tilde{\chi}$ als Charakter von $\widetilde{\mathfrak{G}}$ in $\widetilde{B}$ liegt. Jeder Block $\widetilde{B}$ ist dabei mindesten einem $\overline{B}$ zugeordnet. Ist $(\mathfrak{Q}:1) = p^\mu$ und hat $\widetilde{B}$ den Defekt $\tilde{d}$, so kann ma $\overline{B}$ als Block vom Defekt $\tilde{d} - \mu$ wählen.

Es seien $\tilde{\chi}$ und $\overline{\chi}$ zwei Charaktere von $\widetilde{\mathfrak{G}}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$, die in der genannte Weise zusammenhängen; es seien $\tilde{\omega}$ und $\overline{\omega}$ die zugehörigen linearen Charaktere von $Z(\widetilde{\mathfrak{G}}, \Omega)$ bzw. $Z(\overline{\mathfrak{G}}, \Omega)$. Durchläuft $\widetilde{R}$ die p-regulären Elemente von $\widetilde{\mathfrak{G}}$ und bezeichnet $\overline{R} = \widetilde{R}\mathfrak{Q}$ das entsprechende Element von $\overline{\mathfrak{G}} = \widetilde{\mathfrak{G}}/\mathfrak{Q}$, so folg aus I(11A), daß $\overline{R}$ die p-regulären Elemente von $\overline{\mathfrak{G}}$ durchläuft, und daß de Normalisator von $\overline{R}$ in $\overline{G}$ gerade $\widetilde{\mathfrak{N}}(\widetilde{R})/\mathfrak{Q}$ ist (wo $\widetilde{\mathfrak{N}}(\widetilde{R})$ der Normalisator vo $\widetilde{R}$ in $\widetilde{\mathfrak{G}}$ ist). Daraus ergibt sich

$$\tilde{\omega}(\widetilde{R}) = \overline{\omega}(\overline{R}).$$

Jetzt zeigt I (6F), daß ein gegebener Block $\widetilde{B}$ von $\widetilde{G}$ nur als Bild eines einzige Blocks $\overline{B}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ auftritt. Wählt man, was möglich ist, $\widetilde{R}$ so, daß $\tilde{\omega}(\widetilde{R}) \not\equiv$ (mod $\mathfrak{p}_\nu$) und daß die p-Sylowgruppe $\widetilde{\mathfrak{D}}$ von $\widetilde{\mathfrak{N}}(\widetilde{R})$ die Ordnung $p^{\tilde{d}}$ hat, so is

$\widetilde{\mathfrak{D}}$ eine Defektgruppe von $\widetilde{B}$. Da dann $\widetilde{\mathfrak{D}}/\mathfrak{Q} = \overline{\mathfrak{D}}$ eine p-Sylowgruppe von $\widetilde{\mathfrak{N}}(\widetilde{R})/\mathfrak{Q}$ ist, ist $\overline{\mathfrak{D}}$ von der Ordnung $p^{\tilde{d}-\mu}$ eine Defektgruppe von $\overline{B}$.

Bemerkung. Soll in (2F) der Fall $\mathfrak{D} = \mathfrak{Q}$ eintreten, d.h. $d = \mu$ sein, so ergibt sich aus (2.5) und (2G), daß $r(\mathfrak{Z}:\widetilde{\mathfrak{G}}) = 0$ sein muß, und daß das zu $\widetilde{B}$ gehörige $\overline{B}$ den Defekt 0 haben muß. Dies zeigt erneut die Notwendigkeit der in I (12A) auftretenden Bedingungen.

§ 3. Verallgemeinerte Zerlegungszahlen[3])

Unter einem *p-Element* P von $\mathfrak{G}$ wollen wir ein Element verstehen, dessen Ordnung eine Potenz von p ist. Ein beliebiges Element G von $\mathfrak{G}$ läßt sich dann eindeutig als Produkt

$$G = PR \tag{3.1}$$

eines p-Elements P mit einem p-regulären Element R des Normalisators $\mathfrak{N}(P)$ von P schreiben. Dabei sind P und R geeignete Potenzen von G. Wir nennen P den *p-Faktor* von G und R den *p-regulären Faktor* von G.

Es seien $\varphi_1^P, \varphi_2^P, \ldots, \varphi_{l(P)}^P$ die irreduziblen modularen Charaktere von $\mathfrak{N}(P)$, also $l(P)$ die Anzahl der p-regulären Klassen von $\mathfrak{N}(P)$. Ist $\tilde{\chi}_\lambda$ ein irreduzibler Charakter von $\mathfrak{N}(P)$, so ist $\tilde{\omega}_\lambda(P) = \varepsilon_\lambda$ eine p^α-te Einheitswurzel, wo p^α die Ordnung von P bezeichnet. Weiter ist $\tilde{\chi}_\lambda(PR) = \tilde{\omega}_\lambda(P)\,\tilde{\chi}_\lambda(R) = \varepsilon_\lambda \tilde{\chi}_\lambda(R)$, und hier läßt sich $\tilde{\chi}_\lambda(R)$ nach (1.1) durch die $\varphi_j^P(R)$ ausdrücken.

Da die Beschränkung $\chi_i | \mathfrak{N}(P)$ sich aus den irreduziblen Charakteren $\tilde{\chi}_\lambda$ von $\mathfrak{N}(P)$ zusammensetzt, so hat man für p-reguläres $R \in \mathfrak{N}(P)$ Formeln

$$\chi_i(PR) = \sum_j d_{ij}^P \varphi_j^P(R), \tag{3.2}$$

wo die d_{ij}^P ganz algebraisch im Körper der p^α-ten Einheitswurzeln sind und nicht von R abhängen. Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\varphi_1^P, \varphi_2^P, \ldots$ sind die d_{ij}^P eindeutig bestimmt; wir nennen sie die zu P gehörigen *verallgemeinerten Zerlegungszahlen* von $\mathfrak{G}$. Für $P = 1$ kommt man auf die Formeln (1.1), also auf die gewöhnlichen Zerlegungszahlen von $\mathfrak{G}$ zurück.

(3A) *Ist c_{ij}^P die zu φ_i^P, φ_j^P gehörige Cartansche Invariante von $\mathfrak{N}(P)$, so genügen die verallgemeinerten Zerlegungszahlen den Orthogonalitätsrelationen*

$$\sum_{\mu=1}^{k} \bar{d}_{\mu i}^P d_{\mu j}^P = c_{ij}^P. \tag{3.3}$$

Ist ferner Q ein nicht zu P konjugiertes p-Element von $\mathfrak{G}$, so ist

$$\sum_{\mu=1}^{k} \bar{d}_{\mu i}^P d_{\mu j}^Q = 0. \tag{3.4}$$

Beweis. Es sei $R_1^P, R_2^P, \ldots, R_{l(P)}^P$ ein Vertretersystem für die p-regulären Klassen von $\mathfrak{N}(P)$. Setzt man

$$\mathbf{\chi}^P = (\chi_i(PR_j^P)), \quad D^P = (d_{ij}^P), \quad \boldsymbol{\varphi}^P = (\varphi_i^P(R_j^P)), \quad C^P = (c_{ij}^P),$$

[3]) Zu den Ergebnissen von § 3 vgl. R. Brauer, On the connection between the ordinary and the modular characters of groups of finite order. Ann. of Math. **42**, 926–935 (1941).

so zeigt (3.2), daß $\boldsymbol{\chi}^P = D^P \boldsymbol{\varphi}^P$ ist, also

$$(\bar{\boldsymbol{\chi}}^P)' \boldsymbol{\chi}^Q = (\bar{\boldsymbol{\varphi}}^P)' (\bar{D}^P)' D^Q \boldsymbol{\varphi}^Q. \tag{3.5}$$

Für $P = Q$ ist nach den Orthogonalitätsrelationen für Gruppencharaktere die linke Seite die Diagonalmatrix $N^P = (n(PR_i^P)\delta_{ij})$, also wegen (1.2) (für $\mathfrak{N}(P)$ anstelle von $\mathfrak{G}$) gleich $(\bar{\boldsymbol{\varphi}}^P)' C^P \boldsymbol{\varphi}^P$. Da $\boldsymbol{\varphi}^P$ nicht singulär ist, folgt $C^P = (\bar{D}^P)' D^P$, was mit (3.3) gleichwertig ist. Sind P und Q nicht in $\mathfrak{G}$ konjugiert, so sind PR_α^P und QR_β^Q nicht in $\mathfrak{G}$ konjugiert. Dann verschwindet die linke Seite von (3.5), was $(\bar{D}^P)' D^Q = 0$ und damit (3.4) ergibt.

Aus $(\bar{\boldsymbol{\varphi}}^P)' C^P \boldsymbol{\varphi}^P = N^P$ folgt auch noch

$$\boldsymbol{\varphi}^P (N^P)^{-1} (\bar{\boldsymbol{\varphi}}^P)' C^P = E,$$

also wegen $\boldsymbol{\chi}^P = D^P \boldsymbol{\varphi}^P$ die Gleichung

$$\boldsymbol{\chi}^P (N^P)^{-1} (\bar{\boldsymbol{\varphi}}^P)' C^P = D^P.$$

Explizit geschrieben gibt dies

$$d_{ij}^P = \sum_{\alpha,\beta=1}^{l(P)} \chi_i(PR_\alpha^P)\, n(PR_\alpha^P)^{-1} \bar{\varphi}_\beta^P(R_\alpha^P)\, c_{\beta j}^P. \tag{3.6}$$

Es sei $g = p^a g_0$ mit ganzem, zu p teilerfremdem g_0, $a = \nu(g)$. Es bezeichne Ω_0 den Körper der g_0-ten und Ω_1 den Körper der p^a-ten Einheitswurzeln. Ist σ ein Element der Galoisschen Gruppe von Ω über Ω_0 und ist χ_i ein irreduzibler Charakter von $\mathfrak{G}$, so ist auch die algebraisch Konjugierte χ_i^σ ein irreduzibler Charakter χ_{i^*} von $\mathfrak{G}$. Da die modularen Charaktere von $\mathfrak{N}(P)$ Werte in Ω_0 haben, bleiben sie bei der Anwendung von σ fest. Daher folgt aus (3.2), daß

$$\chi_{i^*}(PR) = (\chi_i(PR))^\sigma = \sum_j (d_{ij}^P)^\sigma \varphi_j^P(R)$$

ist; man hat also

$$d_{i^*j}^P = (d_{ij}^P)^\sigma \quad \text{für} \quad \chi_{i^*} = \chi_i^\sigma. \tag{3.7}$$

Wir sagen, daß χ_i und $(\chi_i)^\sigma$ *p-konjugierte Charaktere* sind. Für $P = 1$ sieht man, daß sie dieselben modularen Bestandteile haben. Also gehören p-konjugierte Charaktere stets zum selben Block (z.B. nach I(4D)).

Unter der *Sektion* $\mathfrak{S}(P)$ eines p-Elements P wollen wir die Gesamtheit aller $G \in \mathfrak{G}$ verstehen, deren p-Faktor zu P in $\mathfrak{G}$ konjugiert ist. Offenbar ist $\mathfrak{S}(P)$ die Vereinigungsmenge der Klassen $\mathfrak{K}_\alpha$, die von den Elementen PR_1^P, $PR_2^P, \ldots, PR_{l(P)}^P$ repräsentiert werden; das sind genau $l(P)$ verschiedene Klassen. Ist $P_1, P_2, \ldots, P_r$ ein Vertretersystem für die p-Klassen von $\mathfrak{G}$, so gehört jedes $G \in \mathfrak{G}$ zu genau einer der Sektionen $\mathfrak{S}(P_1), \mathfrak{S}(P_2), \ldots, \mathfrak{S}(P_r)$. Daher ergibt sich für Klassenzahl von $\mathfrak{G}$ die Formel

$$k = \sum_{i=1}^{r} l(P_i). \tag{3.8}$$

Da Charaktere χ_i für konjugierte Elemente denselben Wert haben, genügt es, in (3.2) P das System $P_1, P_2, \ldots, P_r$ und bei festem P das Element R das System $R_1^P, R_2^P, \ldots, R_{l(P)}^P$ durchlaufen zu lassen.

Wir wollen noch sehen, wie sich d_{ij}^P ändert, wenn man P durch ein konjugiertes p-Element $Q = G^{-1}PG$ (mit $G \in \mathfrak{G}$) ersetzt. Dann ist $\mathfrak{N}(Q) = G^{-1}\mathfrak{N}(P)G$. Durchläuft R die p-regulären Elemente von $\mathfrak{N}(P)$, so durchläuft $R^G = G^{-1}RG$ die p-regulären Elemente von $\mathfrak{N}(Q)$. Setzt man

$$\varphi_{i'}^Q(R^G) = \varphi_i^P(R), \tag{3.9}$$

so sind offenbar $\varphi_{1'}^Q, \varphi_{2'}^Q, \ldots, \varphi_{l(P)'}^Q$ die irreduziblen modularen Charaktere von $\mathfrak{N}(Q)$. Aus

$$\chi_i(QR^G) = \chi_i(G^{-1}PRG) = \chi_i(PR)$$

ergibt sich mit Hilfe von (3.2) und (3.9), daß

$$\chi_i(QR^G) = \sum_j d_{ij}^P \varphi_{j'}^Q(R^G)$$

ist, daß wir also

$$d_{ij'}^Q = d_{ij}^P \tag{3.10}$$

haben.

§ 4. Ganzwertige lineare Funktionen in $Z(\mathfrak{G}, \Omega)$

Wir wollen ein Element $\Sigma a_i K_i$ von $Z = Z(\mathfrak{G}, \Omega)$ *ganz* nennen, wenn die Koeffizienten a_i zu $\mathfrak{o}_v$ gehören. Diese ganzen Elemente bilden einen Teilring $J = J(\mathfrak{G})$ von Z. Eine lineare Funktion f in $Z(\mathfrak{G}, \Omega)$ (vgl. § 2) soll *ganzwertig* genannt werden, wenn $f(\alpha) \in \mathfrak{o}_v$ für alle $\alpha \in J$ gilt. Diese ganzwertigen linearen Funktionen bilden einen $\mathfrak{o}_v$-Modul $\mathfrak{M}$ vom Rang k.

Wir können $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$ mit $J/\mathfrak{p}_v J$ identifizieren. Ist $\zeta \in J$, so wird das durch Restklassenbildung erhaltene Element von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$ durchgehend mit ζ^* bezeichnet werden.

Es seien $B_1, B_2, \ldots, B_t$ die p-Blöcke von $\mathfrak{G}$. Ist $G_\tau \in \mathfrak{K}_i$ und setzt man nach Osima[4])

$$\eta_\tau = \sum_{j=1}^{k} b_j^{(\tau)} K_j \tag{4.1}$$

mit

$$b_j^{(\tau)} = \frac{1}{g} \sum_{\chi_\mu \in B_\tau} \chi_\mu(1)\, \bar{\chi}_\mu(G_j), \tag{4.2}$$

so sind $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$ ein System orthogonaler Idempotente von $Z(\mathfrak{G}, \Omega)$ mit der Summe 1. Ist ω_i der zu χ_i gehörige lineare Charakter von $Z(\mathfrak{G}, \Omega)$, so folgt nämlich aus (4.1) und (4.2) und den Orthogonalitätsrelationen für Gruppencharaktere, daß

$$\omega_i(\eta_\tau) = \begin{cases} 1 & \text{für } \chi_i \in B_\tau \\ 0 & \text{für } \chi_i \notin B_\tau \end{cases} \tag{4.3}$$

ist, woraus sich leicht die Behauptungen ergeben.

[4]) Osima, Masaru: Notes on blocks of group characters. Math. J. Okayama Univ. **4**, 175–188 (1955), p. 178.

Ferner gilt nach I(3.5) für die durch I(3.9) erklärten Charaktere Φ_i die Gleichung

$$b_j^{(\tau)} = \frac{1}{g} \sum_{\varphi_i \in B_\tau} \varphi_i(1)\, \bar{\Phi}_i(G_j).$$

Aus I(3F) folgt, daß $b_j^{(\tau)} = 0$ für p-singuläre G_j ist. Für p-reguläre G_j hat man nach (4.2), I(3.5) und I(3.9)

$$b_j^{(\tau)} = \frac{1}{g} \sum_{\varphi_i \in B_\tau} \Phi_i(1)\, \bar{\varphi}_i(G_j). \tag{4.4}$$

Aus I(3F) folgt, daß $b_j^{(\tau)} \in \mathfrak{o}_\nu$, daß also $\eta_\tau \in J$ ist. Aus (4.3) folgt auch noch, daß η_τ^* das in I § 4 auftretende Idempotent von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$ ist.

Wir wollen sagen, daß eine ganzwertige lineare Funktion f mit dem Block B_τ *assoziiert* ist, falls

$$f(\zeta \eta_\sigma) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu} \tag{4.5}$$

für alle $\zeta \in J$ und alle $\sigma \neq \tau$ gilt. Da ω_i ein linearer Charakter von Z ist und $\omega_i(\zeta) \in \mathfrak{o}_\nu$ ist, folgt aus (4.3), daß für $\chi_i \in B_\tau$ die ganzwertige lineare Funktion ω_i mit B_τ assoziiert ist.

Man setze

$$\mathfrak{M}_\tau = \mathfrak{M} \cap \sum_{\chi_i \in B_\tau} \Omega \omega_i. \tag{4.6}$$

Offenbar ist $\mathfrak{M}_\tau$ ein $\mathfrak{o}_\nu$-Modul, dessen Rang gleich der Anzahl k_τ der $\chi_i \in B_\tau$ ist.

(4A) *Sind* $f_1^{(\tau)}, f_2^{(\tau)}, \ldots, f_{k_\tau}^{(\tau)}$ *eine* $\mathfrak{o}_\nu$*-Basis von* $\mathfrak{M}_\tau$ $(1 \leqq \tau \leqq t)$, *so bilden die Funktionen* $f_j^{(\tau)}$ *für* $\tau = 1, 2, \ldots, t$; $j = 1, 2, \ldots, k_\tau$ *eine* $\mathfrak{o}_\nu$*-Basis von* $\mathfrak{M}$. *Dann und nur dann ist die lineare Funktion*

$$f = \sum_\tau \sum_j a_j^{(\tau)} f_j^{(\tau)} \qquad (a_j^{(\tau)} \in \mathfrak{o}_\nu) \tag{4.7}$$

mit B_σ *assoziiert, wenn* $a_j^{(\tau)} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}$ *für alle* $\tau \neq \sigma$ *und* $j = 1, 2, \ldots, k_\tau$ *ist.*

Beweis. Da wir im ganzen k Charaktere χ_i haben, ist

$$k = \sum_{\tau=1}^{t} k_\tau. \tag{4.8}$$

Also besteht das System $f_j^{(\tau)}$ $(1 \leqq \tau \leqq t,\ 1 \leqq j \leqq k_\tau)$ aus k Funktionen. Um zu zeigen, daß es eine $\mathfrak{o}_\nu$-Basis von $\mathfrak{M}$ bildet, genügt es nachzuweisen, daß wenn ein Ausdruck (4.7) zu $\mathfrak{p}_\nu \mathfrak{M}$ gehört, alle Koeffizienten $a_j^{(\tau)}$ in $\mathfrak{p}_\nu$ liegen. Man setze

$$f_\tau = \sum_j a_j^{(\tau)} f_j^{(\tau)}, \tag{4.9}$$

also

$$f = \sum_\tau f_\tau. \tag{4.10}$$

Aus (4.6) und (4.3) folgt, daß dann

$$f_\varrho(\eta_\lambda \zeta) = 0 \quad \text{für} \quad \varrho \neq \lambda \text{ und } \zeta \in J \tag{4.11}$$

gilt. Also ist

$$f(\eta_\tau \zeta) = f_\tau(\eta_\tau \zeta). \tag{4.12}$$

Gehört nun f zu $\mathfrak{p}_\nu \mathfrak{M}$ und ist π ein Primelement von $\mathfrak{p}_\nu$, so ist $f(\eta_\tau \zeta)/\pi \in \mathfrak{o}_\nu$. Jetzt zeigen (4.11) und (4.12), daß $f_\tau/\pi \in \mathfrak{M}$ ist, nach (4.6) ist also $f_\tau/\pi \in \mathfrak{M}_\tau$. Da $f_1^{(\tau)}, f_2^{(\tau)}, \ldots$ eine $\mathfrak{o}_\nu$-Basis von $\mathfrak{M}_\tau$ bilden, ist nach (4.9) $a_j^{(\tau)} \in \mathfrak{p}_\nu$ für alle j. Da dies für alle τ gilt, bilden die k Funktionen $f_j^{(\tau)}$ (für alle τ und j) in der Tat eine $\mathfrak{o}_\nu$-Basis von $\mathfrak{M}$.

Nimmt man an, daß f in (4.7) mit B_σ assoziiert ist, so gilt $f(\eta_\tau \zeta)/\pi \in \mathfrak{o}_\nu$ für $\tau \neq \sigma$, und die vorangehende Betrachtung liefert $f_\tau/\pi \in \mathfrak{M}_\tau$ für $\tau \neq \sigma$, also $f_j^{(\tau)} \in \mathfrak{p}_\nu$ für $\tau \neq \sigma$. Sind umgekehrt diese Bedingungen erfüllt, so folgt aus (4.11), daß f mit B_σ assoziiert ist.

(4B) *Ist τ fest und durchläuft i die k_τ Werte, für die $\chi_i \in B_\tau$ ist, so hat man Formeln*

$$\omega_i = \sum_j q_{ij} f_j^{(\tau)} \tag{4.13}$$

mit $q_{ij} \in \mathfrak{o}_\nu$. Die zugehörige Determinante verschwindet nicht.

Beweis. Die Existenz von Formeln (4.13) mit $q_{ij} \in \mathfrak{o}_\nu$ folgt aus $\omega_i \in \mathfrak{M}_\tau$. Die Determinante kann nicht verschwinden, da die k_τ Funktionen ω_i mit $\chi_i \in B_\tau$ linear unabhängig sind.

Wir benötigen später noch das folgende Ergebnis.

(4C) *Es sei $\mathfrak{Q}$ eine p-Untergruppe von $\mathfrak{G}$, es sei $\mathfrak{T} = \mathfrak{C}(\mathfrak{Q})$ und $\widetilde{\mathfrak{G}}$ eine die Bedingungen $\mathfrak{T} \subseteq \widetilde{\mathfrak{G}} \subseteq \mathfrak{N}(\mathfrak{Q})$ erfüllende Untergruppe. Es sei $\widetilde{B}$ ein Block von $\widetilde{\mathfrak{G}}$ und $\tilde{f}$ eine mit $\widetilde{B}$ assoziierte ganzwertige lineare Funktion in $Z(\widetilde{\mathfrak{G}}, \Omega)$. Definiert man eine ganzwertige lineare Funktion f in $Z(\mathfrak{G}, \Omega)$ durch die Bedingungen*

$$f(K_\alpha) = \sum_{\tilde{\mathfrak{K}}_\beta \subseteq \mathfrak{K}_\alpha \cap \mathfrak{T}} \tilde{f}(\tilde{K}_\beta), \tag{4.14}$$

so ist f mit dem Block $B = \widetilde{B}^{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$ assoziiert[5]).

Beweis. Man definiere eine lineare Abbildung L von $Z(\mathfrak{G}, \Omega) \to Z(\widetilde{\mathfrak{G}}, \Omega)$ derart, daß

$$L(K_\alpha) = \sum_{\tilde{\mathfrak{K}}_\beta \subseteq \mathfrak{K}_\alpha \cap \mathfrak{T}} \tilde{K}_\beta \tag{4.15}$$

ist. Ist $\tilde{J}$ die Menge der ganzen Elemente von $Z(\widetilde{\mathfrak{G}}, \Omega)$, so gilt $J \to \tilde{J}$. Aus (4.14) folgt, daß f die aus $\tilde{f}$ und L zusammengesetzte Funktion ist:

$$f = \tilde{f} \circ L.$$

Durch Restklassenabbildung entsteht aus L eine lineare Abbildung H von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*) \to Z(\widetilde{\mathfrak{G}}, \Omega^*)$. Dabei ist H nach I (7B) ein Algebra-Homomorphismus. Insbesondere ist also $H(\eta_\tau^*)$ entweder ein Idempotent von $Z(\widetilde{\mathfrak{G}}, \Omega^*)$ oder 0.

[5]) Ist $\widetilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{C}(\mathfrak{Q})$ gewählt, so kann man f in der Form $f = \tilde{f}^{\mathfrak{G}}$ schreiben.

Haben $\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \ldots$ die analoge Bedeutung für $Z(\tilde{\mathfrak{G}}, \Omega)$ wie oben $\eta_1, \eta_2, \ldots$ fü $Z(\mathfrak{G}, \Omega)$, so folgt, daß $H(\eta_\tau^*)$ eine Summe $\sum \tilde{\eta}_\lambda^*$ ist, wobei λ über eine (mög licherweise leere) Menge $M(\tau)$ von Indizes läuft. Daher hat man

$$L(\eta_\tau) \equiv \sum_{\lambda \in M(\tau)} \tilde{\eta}_\lambda \pmod{\mathfrak{p}_\nu \tilde{J}}. \tag{4.16}$$

Ist nun $\tilde{\chi}$ ein irreduzibler Charakter des Blockes $\tilde{B}_\sigma$ von $\tilde{\mathfrak{G}}$, ist $\tilde{\omega}$ der zug hörige lineare Charakter von $Z(\tilde{G}, \Omega)$ und ist $\omega = \tilde{\omega} \circ L$, so ergibt Vergleic von (4.15) mit I (7D), daß $\omega \bmod \mathfrak{p}_\nu \mathfrak{M}$ den zu $\tilde{B}_\sigma^{\mathfrak{G}}$ gehörigen linearen Charaktere von $Z(\mathfrak{G}, \Omega)$ kongruent ist. Ist $\tilde{B}_\sigma^{\mathfrak{G}} = B_\tau$, so ist nach (4.3) $\omega(\eta_\tau) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}$ also nach (4.16)

$$\sum_{\lambda \in M(\tau)} \tilde{\omega}(\tilde{\eta}_\lambda) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}.$$

Jetzt folgt aus (4.3) (auf $\tilde{\mathfrak{G}}$ angewendet), daß σ dann zu $M(\tau)$ gehören muß Ist umgekehrt $\sigma \in M(\tau)$, so ist $\omega(\eta_\tau) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}$ und daher $\tilde{B}_\sigma^{\mathfrak{G}} = B_\tau$. Als besteht $M(\tau)$ aus den Indizes σ, für die $\tilde{B}_\sigma^{\mathfrak{G}} = B_\tau$ ist.

Ist nun $\tilde{f}$ eine mit $\tilde{B} = \tilde{B}_\sigma$ assoziierte ganzwertige lineare Funktion i $Z(\tilde{\mathfrak{G}}, \Omega)$, so folgt für $f = \tilde{f} \circ L$ und $\zeta \in J$, daß

$$\begin{aligned} f(\zeta \eta_\varrho) &\equiv \tilde{f}\big(L(\zeta \eta_\varrho)\big) \equiv \tilde{f}\big(L(\zeta)\, L(\eta_\varrho)\big) \\ &\equiv \sum_{\lambda \in M(\varrho)} \tilde{f}\big(L(\zeta)\, \tilde{\eta}_\lambda\big) \end{aligned} \pmod{\mathfrak{p}_\nu}$$

ist. Ist $B_\varrho \neq B_\sigma^{\mathfrak{G}}$, also $\sigma \notin M(\varrho)$, so liegt der letzte Ausdruck in $\mathfrak{p}_\nu$ und als ist f mit $\tilde{B}_\sigma^{\mathfrak{G}}$ assoziiert, wie behauptet war.

§ 5. Hilfssätze

In § 5 wird angenommen, daß P ein p-Element im Zentrum $\mathfrak{C}(\mathfrak{G})$ von ist. Wir werden später bei beliebigem $\mathfrak{G}$ die Ergebnisse auf die Untergrupp $\mathfrak{N}(P)$ von $\mathfrak{G}$ anwenden. Aus der Voraussetzung folgt, daß für die irreduzibl Darstellung $\mathfrak{X}_i$ von $\mathfrak{G}$ mit dem Charakter χ_i die Gleichung $\mathfrak{X}_i(PG) = \varepsilon_i \mathfrak{X}(G$ für $G \in \mathfrak{G}$ gilt, wo ε_i eine Einheitswurzel ist. Daher ist

$$\chi_i(PG) = \varepsilon_i \chi_i(G). \tag{5.1}$$

Da jetzt $\mathfrak{N}(P) = \mathfrak{G}$ ist, kann man in § 3 $\varphi_j^P = \varphi_j$ wählen. Vergleich von (5.1 und (1.1) mit (3.2) für p-reguläres G liefert dann

$$d_{ij}^P = \varepsilon_i d_{ij}. \tag{5.2}$$

(5A) *Es sei P ein p-Element von $\mathfrak{C}(\mathfrak{G})$, und es sei Q ein von P verschiedene p-Element von $\mathfrak{G}$. Ist U ein Element der Sektion $\mathfrak{S}(P)$ von P und V ein Elemen der Sektion $\mathfrak{S}(Q)$, so gilt für jeden Block B von $\mathfrak{G}$ die Gleichung*

$$\sum_{\chi_i \in B} \chi_i(U)\, \bar{\chi}_i(V) = 0.$$

Beweis. Wir können $U = PR$, $V = QT$ setzen, wo R und T p-regulär sind und $T \in \mathfrak{N}(Q)$ ist. Aus (5.1) folgt

$$\chi_i(U)\,\bar{\chi}_i(V) = \chi_i(PR)\,\chi_i(T^{-1}Q^{-1}) = \varepsilon_i\,\chi_i(R)\,\chi_i(Q^{-1}T^{-1})$$
$$= \chi_i(R)\,\chi_i(PQ^{-1}T^{-1}).$$

Wegen $P \neq Q$ ist das Element $S = PQ^{-1}T^{-1}$ p-singulär. Summiert man über alle $\chi_i \in B$, so erhält man nach I(3.5), I(4D) und I(3.9) die Summe

$$\sum_i \chi_i(R)\,\chi_i(S) = \sum_i \sum_{\varphi_j \in B} d_{ij}\varphi_j(R)\,\chi_i(S) = \sum_{\varphi_j \in B} \varphi_j(R)\,\Phi_j(S),$$

die wegen I(3F) in der Tat verschwindet.

(5B) *Es sei P ein p-Element von $\mathfrak{C}(\mathfrak{G})$, es sei B_τ ein Block von $\mathfrak{G}$ und man nehme an, daß in den Bezeichnungen von* (4A) *für alle i die Gleichung*

$$\sum_{j=1}^{k} c_j f_i^{(\tau)}(K_j) = 0 \tag{5.3}$$

mit von i unabhängigen Koeffizienten $c_j \in \mathfrak{o}_v$ gilt. Dann ist

$$\sum_{\alpha}{}' c_\alpha f_i^{(\tau)}(K_\alpha) = 0, \tag{5.4}$$

wo in $\sum'$ nur über die Klassen $\mathfrak{K}_\alpha$ in der Sektion $\mathfrak{S}(P)$ zu summieren ist.

Beweis. Ist $\chi_i \in B$ und ist ω_i der zugehörige lineare Charakter von $Z(\mathfrak{G}, \Omega)$, so folgt aus (4B), daß (5.3) richtig bleibt, wenn man $f_i^{(\tau)}$ durch ω_i ersetzt. Drückt man nach I(2.3) ω_i durch χ_i aus, so erhält man

$$\sum_{j=1}^{k} c_j \frac{1}{n(G_j)}\,\chi_i(G_j) = 0,$$

wo G_j ein Vertreter der Klasse $\mathfrak{K}_j$ ist. Es sei $\mathfrak{K}_\beta$ eine zur Sektion $\mathfrak{S}(P)$ gehörige Klasse; man multipliziere mit $\bar{\chi}_i(G_\beta)$ und addiere über alle $\chi_i \in B$. Auf Grund von (5A) findet man

$$\sum_{\alpha}{}' c_\alpha n(G_\alpha)^{-1} \sum_{\chi_i \in B} \chi_i(G_\alpha)\,\bar{\chi}_i(G_\beta) = 0.$$

Multipliziert man hier mit $\bar{c}_\beta n(G_\beta)^{-1}$ und addiert man über alle $\mathfrak{K}_\beta \in \mathfrak{S}(P)$, so hat man

$$\sum_{\chi_i \in B} \left| \sum_{\alpha}{}' c_\alpha n(G_\alpha)^{-1} \chi_i(G_\alpha) \right|^2 = 0.$$

Also gilt für jedes $\chi_i \in B$ die Gleichung

$$\sum_{\alpha}{}' c_\alpha n(G_\alpha)^{-1} \chi_i(G_\alpha) = 0.$$

Dies liefert für dieselben i die Beziehung

$$\sum_{\alpha}{}' c_\alpha \omega_i(G_\alpha) = 0.$$

Erneute Anwendung von (4B) liefert die Behauptung (5.4).

(5C) *Die Behauptung von* (5B) *bleibt richtig, wenn man in* (5.3) *und* (5.4) *Gleichheit durch Kongruenz* (mod $\mathfrak{p}_\nu$) *ersetzt.*

Beweis. Bildet man aus den Werten der k Funktionen $f_i^{(\sigma)}$ ($\sigma = 1, 2, \ldots, t$; $i = 1, 2, \ldots, k_\sigma$) für die k Elemente K_j eine Determinante Δ, so zeigen wir zunächst

$$\Delta \in \mathfrak{o}_\nu, \quad \Delta \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}. \tag{5.5}$$

Die erste Behauptung folgt aus $f_i^{(\sigma)}(K_j) \in \mathfrak{o}_\nu$. Wäre $\Delta \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}$, so könnte man eine Linearverbindung f der $f_i^{(\sigma)}$ mit Koeffizienten in Ω bilden derart, daß nicht alle Koeffizienten zu $\mathfrak{o}_\nu$ gehören, daß aber alle $f(K_j) \in \mathfrak{o}_\nu$ sind. Dies widerspricht (4A), da dann $f \in \mathfrak{M}$ wäre.

Aus (5.5) folgt für festes τ, daß man k_τ Klassen $\mathfrak{K}_j$ so auswählen kann, daß die entsprechende Unterdeterminante von Δ vom Grad k_τ,

$$\operatorname{Det}\left(f_i^{(\tau)}(K_j)\right) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu} \tag{5.6}$$

ist. Werden die so ausgewählten k_τ Klassen als die Klassen $\mathfrak{K}_\gamma$ bezeichnet, wobei also γ geeignete Indizes durchläuft, so hat man für $j = 1, 2, \ldots, k$ und für $i = 1, 2, \ldots, k_\tau$ Formeln

$$f_i^{(\tau)}(K_j) = \sum_\gamma b_{j\gamma} f_i^{(\tau)}(K_\gamma), \tag{5.7}$$

wo die $b_{j\gamma}$ in $\mathfrak{o}_\nu$ liegen und nicht von i abhängen. Ist hier $\mathfrak{K}_j$ eine Klasse der Sektion $\mathfrak{S}(P)$, so folgt aus (5B), daß man annehmen kann, daß in (5.7) rechts nur Klassen $\mathfrak{K}_\gamma \in \mathfrak{S}(P)$ auftreten. Ebenso folgt für $\mathfrak{K}_j \notin \mathfrak{S}(P)$, daß man annehmen kann, daß in (5.7) rechts nur Klassen $\mathfrak{K}_\gamma \notin \mathfrak{S}(P)$ auftreten.

Gilt nun für $i = 1, 2, \ldots, k_\tau$ die Kongruenz

$$\sum_j a_j f_i^{(\tau)}(K_j) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}$$

mit $a_j \in \mathfrak{o}_\nu$, so trenne man zunächst die Glieder für die $\mathfrak{K}_j \in \mathfrak{S}(P)$ und die Glieder mit $\mathfrak{K}_j \notin \mathfrak{S}(P)$. Drückt man in jedem Fall $f_i^{(\tau)}(K_j)$ nach (5.7) durch die $f_i^{(\tau)}(K_\gamma)$ aus, so erhält man eine Kongruenz

$$\sum_\gamma c_\gamma f_i^{(\tau)}(K_\gamma) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}$$

mit von i unabhängigen $c_\gamma \in \mathfrak{o}_\nu$. Wegen (5.6) müssen dann aber alle c_γ in $\mathfrak{p}_\nu$ liegen. Insbesondere ist also

$$\sum_\gamma{}' c_\gamma f_i^{(\tau)}(K_\gamma) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}, \tag{5.8}$$

wo in $\sum'$ der Index nur die Werte von γ durchläuft, für die $\mathfrak{K}_\gamma \in \mathfrak{S}(P)$ ist. Aus der im Anschluß an (5.7) gemachten Bemerkung folgt aber, daß (5.8) mit

$$\sum_\alpha{}' a_\alpha f_i^{(\tau)}(K_\alpha) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}$$

gleichwertig ist, wo $\mathfrak{K}_\alpha$ alle Klassen aus $\mathfrak{S}(P)$ durchläuft. Dies liefert (5C).

Auf Grund von (4A) kann man (5C) auch in der folgenden Weise formulieren:

(5C*) *Es sei P ein p-Element von $\mathfrak{G}(\mathfrak{G})$. Gibt es k Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_k$ in $\mathfrak{o}_\nu$, derart daß für alle ganzwertigen linearen, mit B_τ assoziierten Funktionen f die Kongruenz*

$$\sum_j a_j f(K_j) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu} \tag{5.9}$$

gilt, so bleibt (5.9) *richtig, wenn man K_j nur die Klassen von $\mathfrak{S}(P)$ durchlaufen läßt.*

In § 6 wird von den bisherigen Ergebnissen nur (5C*) verwendet werden. Wir brauchen noch einen weiteren speziellen Hilfssatz:

(5D) *Es sei P ein p-Element von $\mathfrak{G}(\mathfrak{G})$, es sei B_τ ein Block von $\mathfrak{G}$. Es sei $R_1, R_2, \ldots, R_l$ ein Vertretersystem für die p-regulären Klassen von $\mathfrak{G}$, und die Klasse von PR_λ sei mit $\mathfrak{K}_\lambda$ bezeichnet. Ist jedem irreduziblen modularen Charakter $\varphi_j \in B_\tau$ ein Element $y_j \in \mathfrak{o}_\nu$ zugeordnet, derart daß für alle ganzwertigen linearen mit B_τ assoziierten Funktionen f die Kongruenz gilt*

$$\sum_{\alpha=1}^{l} \sum_j f(K_\alpha) \bar{\varphi}_j(R_\alpha)\, y_j \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}, \tag{5.10}$$

so gehören alle y_j zu $\mathfrak{p}_\nu$.

Beweis. Offenbar sind $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_l$ gerade die Klassen von $\mathfrak{S}(P)$.

Es sei $\chi_i \in B_\sigma \neq B_\tau$. Nach (5.2) und I(4D) gilt dann $d_{ij}^P = 0$ für alle $\varphi_j \in B_\tau$. Wegen (3.6) ergibt sich

$$\sum_{\alpha=1}^{l} \sum_{\beta=1}^{l} \chi_i(PR_\alpha)\, n(PR_\alpha)^{-1} \bar{\varphi}_\beta(R_\alpha)\, c_{\beta j}^P = 0$$

für alle diese j. Wegen $\mathfrak{N}(P) = \mathfrak{G}$ ist $c_{\beta j}^P = c_{\beta j}$. Nach I(4D) genügt es, β über die Werte laufen zu lassen, für die $\varphi_\beta \in B_\tau$ ist. Da

$$\operatorname{Det}(c_{ij}) \neq 0 \qquad (\varphi_i, \varphi_j \in B_\tau)$$

ist, folgt

$$\sum_{\alpha=1}^{l} \chi_i(PR_\alpha)\, n(PR_\alpha)^{-1} \bar{\varphi}_j(R_\alpha) = 0$$

für $\varphi_j \in B_\tau$, $\chi_i \in B_\sigma \neq B_\tau$. Also ist

$$\sum_{\alpha=1}^{l} \omega_i(K_\alpha) \bar{\varphi}_j(R_\alpha) = 0$$

und nach (4B)

$$\sum_{\alpha=1}^{l} f_i^{(\sigma)}(K_\alpha) \bar{\varphi}_j(R_\alpha) = 0$$

für $\sigma \neq \tau$. Daher gilt (5.10) nicht nur für $f = f_i^{(\tau)}$, sondern auch für $f = f_i^{(\sigma)}$ mit $\sigma \neq \tau$. Wegen (5.5) hat man dann

$$\sum_j \bar{\varphi}_j(R_\alpha)\, y_j \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}$$

für alle α. Da die φ_j linear unabhängig mod $\mathfrak{p}_\nu$ sind, folgt, daß alle $y_j \in \mathfrak{p}_\nu$ sind.

§ 6. Der Hauptsatz

Wir beweisen jetzt den folgenden Satz:

(6A) *Es sei P ein p-Element einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$. Ist φ_j^P ein irreduzibler modularer Charakter der Gruppe $\mathfrak{N}(P)$, der zum Block $\widetilde{B}$ von $\mathfrak{N}(P)$ gehört, und ist χ_i ein irreduzibler Charakter von $\mathfrak{G}$, so kann die Zerlegungszahl d_{ij}^P nur dann von 0 verschieden sein, wenn χ_i zum Block $B = \widetilde{B}^{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$ gehört.*

Der Beweis wird in einer Reihe von Schritten geführt werden.

1. Ist $\widetilde{B}$ ein Block von $\widetilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{N}(P)$, so ist $B = \widetilde{B}^{\mathfrak{G}}$ nach (2A) mit $\mathfrak{Q} = \{P\}$ definiert. Wir definieren eine Matrix D_0 durch

$$D_0 = (d_{ij}^P), \tag{6.1}$$

wo i die Werte durchläuft, für die $\chi_i \in B$ ist, und j die Werte, für die $\varphi_j^P \in \widetilde{B}$. Enthält also $\widetilde{B}$ etwa h irreduzible modulare Charaktere, so hat D_0 gerade h Spalten. Wir wollen zunächst zeigen, daß D_0 den Rang h hat. Wäre das nicht richtig, so gäbe es h nicht sämtlich verschwindende Elemente $z_j \in \Omega$, derart daß für alle $\chi_j \in B$

$$\sum_j d_{ij}^P z_j = 0 \tag{6.2}$$

ist. Setzt man den Wert von d_{ij}^P aus (3.6) ein, drückt χ_i durch ω_i aus und verwendet (4B), so sieht man, daß für $i = 1, 2, \ldots, k_\tau$ die Gleichung

$$\sum_\alpha \sum_\beta \sum_j f_i^{(\tau)}(K_\alpha)\, \bar{\varphi}_\beta^P(R_\alpha^P)\, c_{\beta j}^P z_j = 0$$

gilt, wo $\mathfrak{K}_\alpha$ die Klasse von PR_α^P ist. Da $\varphi_j^P \in \widetilde{B}$ ist, genügt es nach I(4D), β die h Werte durchlaufen zu lassen, für die $\varphi_\beta^P \in \widetilde{B}$ ist. Da die aus den h^2 Werten c_{ij}^P mit $\varphi_i^P, \varphi_j^P \in \widetilde{B}$ gebildete Determinante nicht verschwindet, so sind nicht alle h Zahlen

$$y_\beta = \sum_j c_{\beta j}^P z_j$$

Null. Dann ist

$$\sum_\alpha \sum_\beta f_i^{(\tau)}(K_\alpha)\, \bar{\varphi}_\beta^P(R_\alpha^P)\, y_\beta = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k_\tau).$$

Multipliziert man alle y_β mit einem geeigneten festen Element aus $\mathfrak{o}_\nu$, so darf man annehmen, daß alle y_β in $\mathfrak{o}_\nu$, aber nicht alle in $\mathfrak{p}_\nu$ liegen. Nach (4A) gilt dann für eine beliebige ganzwertige, mit B_τ assoziierte lineare Funktion f in $Z(\mathfrak{G}, \Omega)$ die Kongruenz

$$\sum_\alpha \sum_\beta f(K_\alpha)\, \bar{\varphi}_\beta^P(R_\alpha^P)\, y_\beta \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}. \tag{6.3}$$

Ist $\tilde{f}$ eine ganzwertige Funktion in $Z(\widetilde{\mathfrak{G}}, \Omega)$, die mit $\widetilde{B}$ assoziiert ist, und setzt man $f = \tilde{f}^{\mathfrak{G}}$, so folgt aus (4C) mit $\mathfrak{Q} = \{P\}$, $\mathfrak{T} = \widetilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{N}(P)$, daß (6.3) für dieses f gilt. Hier ist

$$f(K_\alpha) = \sum_{\widetilde{\mathfrak{K}}_\varrho \subseteq \mathfrak{K}} \tilde{f}(\widetilde{K}_\varrho). \tag{6.4}$$

Ist etwa $\mathfrak{K}_\alpha$ die Klasse von $PR_\varkappa^P$ in $\mathfrak{G}=\mathfrak{N}(P)$, so tritt $\mathfrak{K}_\alpha$ unter den $\mathfrak{K}_\varrho$ auf. Offenbar ist $\mathfrak{K}_\alpha$ die einzige unter den Klassen $\mathfrak{K}_\varrho \subseteq \mathfrak{K}_\varkappa$, die zur Sektion $\mathfrak{S}(P)$ von P in $\mathfrak{G}$ gehört. Setzt man daher (6.4) in (6.3) ein und wendet man (5C*) für $\mathfrak{G}=\mathfrak{N}(P)$ anstelle von $\mathfrak{G}$) an, so findet man

$$\sum_{\alpha,\beta} \tilde{f}(K_\alpha)\,\bar{\varphi}_\beta^P(R_\alpha^P)\,y_\beta \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}. \tag{6.5}$$

Dies gilt für alle ganzwertigen linearen, mit $\tilde{B}$ assoziierten Funktionen $\tilde{f}$ in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G},\Omega)$. Jetzt folgt aus (5D), daß alle $y_\beta \in \mathfrak{p}_\nu$ sind; dies ist ein Widerspruch. Also hat D_0 in der Tat den Rang h.

2. Man setze

$$\bar{D}_0' D_0 = U_0 = (u_{ij}). \tag{6.6}$$

Offenbar ist U_0 eine Matrix h-ten Grades, die zu einer nicht negativen Hermiteschen Form H_0 gehört. Verschwindet H_0 für eine Spalte $\mathfrak{z}$, die aus h komplexen Zahlen besteht, und ist $\mathfrak{x}$ die Spalte $\mathfrak{x}=D_0\mathfrak{z}$, so folgt aus $\bar{\mathfrak{z}}' U_0 \mathfrak{z}=0$, daß $\bar{\mathfrak{x}}'\mathfrak{x}=0$. Also ist $\mathfrak{x}$ die Nullspalte 0. Da $D_0\mathfrak{z}=0$ ist und D_0 den Rang h hat, ist $\mathfrak{z}=0$. Daher ist H_0 positiv definit und folglich $\operatorname{Det} U_0 > 0$.

Man setze $D_1=(d_{ij}^P)$, wo hier i im Gegensatz zu (6.1) die Werte durchläuft, für die $\chi_i \notin B$ ist, und j dieselben Werte wie in (6.1). Dann ist

$$U_1 = \bar{D}_1' D_1 \tag{6.7}$$

ebenfalls die Matrix einer nicht negativen Hermiteschen Form H_1. Ferner ergibt sich aus (6.6), (6.7) und (3A) für den Koeffizienten in der i-ten Zeile, k-ten Spalte von U_0+U_1 der Wert

$$\sum_{\chi_\mu \in B} \bar{d}_{\mu i}^P d_{\mu j}^P + \sum_{\chi_\mu \notin B} \bar{d}_{\mu i}^P d_{\mu j}^P = c_{ij}^P. \tag{6.8}$$

Ordnet man die Charaktere $\varphi_1^P, \varphi_2^P, \ldots$ so, daß die ersten h zu $\tilde{B}$ gehören, so ist nach I(4D) für $\tilde{\mathfrak{G}}$ die Matrix C^P direkte Summe

$$C^P = \begin{pmatrix} C^P(\tilde{B}) & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \tag{6.9}$$

der zu $\tilde{B}$ gehörigen Teilmatrix $C^P(B)$ und einer Matrix vom Grad $l(P)-h$. Jetzt zeigt (6.8), daß

$$U_0 + U_1 = C^P(\tilde{B}) \tag{6.10}$$

ist. Die Behauptung (6A) wird bewiesen sein, wenn wir $U_1=0$ zeigen können, da dies $D_1=0$ zur Folge hat. Wäre $U_1 \neq 0$, so würde aus (6.10) nach bekannten Sätzen über Hermitesche Formen folgen, daß

$$\operatorname{Det} U_0 < \operatorname{Det} C^P(\tilde{B}) \tag{6.11}$$

ist. Nun werden wir in **3** zeigen, daß U_0 eine Matrix mit ganzen rationalen Koeffizienten ist, die links im Bereich der ganzen rationalen Zahlen durch

$C^P(\widetilde{B})$ teilbar ist. Da Det $U_0 > 0$ war, ist dann Det $U_0 \geqq$ Det $C^P(\widetilde{B})$. Dies ist ein Widerspruch zu (6.11), und (6A) wird bewiesen sein.

3. Wir setzen jetzt

$$\left(\sum_{\chi_\mu \in B} \bar{d}^P_{\mu i} d^P_{\mu j}\right) = (u_{ij}) = U, \tag{6.12}$$

wo hier i und j alle Werte $1, 2, \ldots, l(P)$ durchlaufen. Dann ist U_0 die Teilmatrix in den ersten h Zeilen und Spalten von U. Können wir zeigen, daß U ganze rationale Koeffizienten hat und links durch C^P teilbar ist, so ergeben sich daraus wegen (6.9) die am Ende von **2.** bezüglich U_0 ausgesprochenen Behauptungen, und (6A) wird bewiesen sein.

Es mögen Ω_0 und Ω_1 dieselbe Bedeutung wie in § 3 haben. Wie dort gezeigt wurde, ist dann jedes $d^P_{\mu i}$ ganz algebraisch in Ω_1, und daher gilt dasselbe für alle u_{ij}. Wendet man ferner ein Element σ der Galoisschen Gruppe von Ω über Ω_0 an, so werden die Charaktere $\chi_\mu \in B$ permutiert, und nach (3.7) bleibt jedes u_{ij} fest. Also gilt $u_{ij} \in \Omega_0$, d.h. $u_{ij} \in \Omega_0 \cap \Omega_1$, und daher sind in der Tat alle u_{ij} ganz rational.

Man setze

$$(C^P)^{-1} U = W = (w_{ij}). \tag{6.13}$$

Da Det C^P eine Potenz p^g von p ist[6]), sind alle w_{ij} rationale Zahlen mit dem Nenner p^g. Können wir zeigen, daß $w_{ij} \in \mathfrak{o}_\nu$ ist, so sind alle w_{ij} ganz rational und wir sind fertig.

Es mögen $\boldsymbol{\varphi}^P$ und N^P dieselbe Bedeutung wie in § 3 haben. Ferner sei jetzt $D = (d^P_{ij})$ mit $\chi_i \in B$, $j = 1, 2, \ldots, l(P)$. Aus (6.12) und (6.13) folgt

$$(\boldsymbol{\varphi}^P)^{-1} W \boldsymbol{\varphi}^P = (C^P \boldsymbol{\varphi}^P)^{-1} \bar{D}' D \boldsymbol{\varphi}^P.$$

Nun ist $(\bar{\boldsymbol{\varphi}}^P)' C^P \boldsymbol{\varphi}^P = N^P$. Also haben wir

$$(\boldsymbol{\varphi}^P)^{-1} W \boldsymbol{\varphi}^P = (N^P)^{-1} (\bar{\boldsymbol{\varphi}}^P)' \bar{D}' D \boldsymbol{\varphi}^P.$$

Da die Koeffizienten von $\boldsymbol{\varphi}^P$ in $\mathfrak{o}_\nu$ liegen und Det $\boldsymbol{\varphi}^P$ nach I(3E) eine Einheit von $\mathfrak{o}_\nu$ ist, genügt es zu zeigen, daß die Koeffizienten der rechten Seite zu $\mathfrak{o}_\nu$ gehören. Nach (3.2) ist der Koeffizient in der i-ten Zeile, j-ten Spalte rechts gleich

$$n(PR^P_i)^{-1} \sum_{\chi_\mu \in B} \bar{\chi}_\mu(PR^P_i)\, \chi_\mu(PR^P_j).$$

Damit ist der ganze Beweis auf den Beweis des folgenden Hilfssatzes zurückgeführt:

HILFSSATZ. *Es sei B ein Block von $\mathfrak{G}$. Sind $L, M \in \mathfrak{G}$, so ist*

$$\sum_{\chi_i \in B} \bar{\chi}_i(L)\, \chi_i(M) \equiv n(L)\, \mathfrak{o}_\nu.$$

[6]) Vgl. etwa R. BRAUER, Ann. of Math. **57**, 357–377 (1953), Theorem 13. Für das Theorem 1 dieser Arbeit, aus dem der fragliche Satz hergeleitet wird, findet sich ein einfacherer Beweis bei R. BRAUER und J. TATE, Ann. of Math. **63**, 1–7 (1955).

Beweis des Hilfssatzes. Wie in I(2.2) setze man

$$K_\alpha K_\beta = \sum_\gamma a_{\alpha\beta\gamma} K_\gamma . \tag{6.14}$$

Für jedes j sei G_j ein Element aus $\mathfrak{K}_j$. Dann ist $a_{\alpha\beta\gamma}$ die Anzahl der geordneten Paare (ϱ, σ) von Elementen von $\mathfrak{G}$, die die Bedingungen

$$\varrho\sigma = G_\gamma , \qquad \varrho \in \mathfrak{K}_\alpha , \qquad \sigma \in \mathfrak{K}_\beta$$

erfüllen. Da $\mathfrak{K}_\gamma$ aus $g/n(G_\gamma)$ Elementen besteht, gibt es $g a_{\alpha\beta\gamma}/n(G_\gamma)$ geordnete Paare (ϱ, σ) von Elementen, für die

$$\varrho\sigma \in \mathfrak{K}_{\gamma'} , \qquad \varrho \in \mathfrak{K}_\alpha , \qquad \sigma \in \mathfrak{K}_\beta$$

ist. Für jedes j sei $\mathfrak{K}_{j'}$ die Klasse, die aus den Inversen der Elemente von $\mathfrak{K}_j$ besteht. Da $\varrho\sigma = \tau$ mit $\sigma\tau^{-1} = \varrho^{-1}$ äquivalent ist, erhält man $g a_{\alpha\beta\gamma}/n(G_\gamma) = g a_{\beta\gamma'\alpha'}/n(G_\alpha)$, woraus

$$a_{\alpha\beta\gamma} \in \frac{n(G_\gamma)}{n(G_\alpha)}\, \mathfrak{o}_r \tag{6.15}$$

folgt.

Da ω_i ein linearer Charakter von $Z(\mathfrak{G}, \Omega)$ ist, ergibt sich aus (6.14)

$$\omega_i(K_\alpha)\,\omega_i(K_\beta) = \sum_\gamma a_{\alpha\beta\gamma}\omega_i(K_\gamma) .$$

Drückt man ω_i durch χ_i aus, so hat man nach einfacher Umformung

$$\chi_i(G_\alpha)\,\chi_i(G_\beta) = \frac{n(G_\alpha)\,n(G_\beta)}{g} \sum_\gamma \frac{a_{\alpha\beta\gamma}}{n(G_\gamma)}\,\chi_i(G_\gamma)\,\chi_i(1) .$$

Summiert man jetzt über alle $\chi_i \in B$, so ergibt (4.2) für $B = B_\tau$ die Gleichung

$$\sum_{\chi_i \in B} \chi_i(G_\alpha)\,\chi_i(G_\beta) = \sum_\gamma \frac{n(G_\alpha)\,n(G_\beta)}{n(G_\gamma)}\, a_{\alpha\beta\gamma}\, b_{\gamma'}^{(\tau)} .$$

Wegen $b_{\gamma'}^{(\tau)} \in \mathfrak{o}_r$ und (6.15) liegt die Summe in $n(G_\beta)\,\mathfrak{o}_r$. Wählt man $\mathfrak{K}_\alpha$ und $\mathfrak{K}_\beta$ so, daß $L^{-1} \in \mathfrak{K}_\beta$, $M \in \mathfrak{K}_\alpha$, so erhält man wegen $n(L) = n(G_\beta{}^1) = n(G_\beta)$ den Hilfssatz.

Damit ist (6A) vollständig bewiesen.

§ 7. Folgerungen

Es sei P ein p-Element von $\mathfrak{G}$ und $R \in \mathfrak{N}(P)$ p-regulär. Gehört χ_i zum Block B_τ, so zeigt (6A), daß es genügt, in den Formeln (3.2):

$$\chi_i(PR) = \sum_j d_{ij}^P \varphi_j^P(R) \tag{7.1}$$

φ_j^P über diejenigen irreduziblen modularen Charaktere von $\mathfrak{N}(P)$ laufen zu lassen, die zu Blöcken $\widetilde{B}$ von $\mathfrak{N}(P)$ mit $\widetilde{B}^{\mathfrak{G}} = B$ gehören. Gibt es kein derartiges $\widetilde{B}$, so ist $\chi_i(PR) = 0$. Ist $\widetilde{B}^{\mathfrak{G}} = B$, so gehört die Defektgruppe $\widetilde{\mathfrak{D}}$ von $\widetilde{B}$ nach (2B) und I(8B) zu einer Konjugierten der Defektgruppe $\mathfrak{D}$ von B.

Andererseits ist nach I(9F) $P \in \widetilde{\mathfrak{D}}$, da P im Zentrum von $\mathfrak{N}(P)$ liegt. Also gehört dann P zu einer Konjugierten von $\mathfrak{D}$. Dies liefert das folgende Ergebnis:

(7A) *Es sei B ein Block von $\mathfrak{G}$ mit der Defektgruppe $\mathfrak{D}$. Ist P ein p-Element von $\mathfrak{G}$, dessen Klasse kein Element von $\mathfrak{D}$ enthält, so verschwindet jedes $\chi_i \in B$ für alle Elemente der Sektion $\mathfrak{S}(P)$.*

Als Spezialfall ist darin das frühere Ergebnis enthalten, daß ein Charakter vom Defekt 0 für alle p-singulären Elemente verschwindet.

(7B) *Sind P und Q zwei nicht konjugierte p-Elemente von $\mathfrak{G}$, so gilt für jeden Block B die Gleichung*

$$\sum_{\chi_\mu \in B} \bar{d}^P_{\mu i} d^Q_{\mu j} = 0. \tag{7.2}$$

Beweis. Wegen (3.4) genügt es, (7.2) für alle Blöcke B von $\mathfrak{G}$ mit Ausnahme eines festen Blockes B_0 zu beweisen. Gehört φ_i^P zum Block $\widetilde{B}$ von $\mathfrak{N}(P)$, so wähle man dabei $B_0 = \widetilde{B}^{\mathfrak{G}}$. Für $B \neq B_0$ sind dann alle in (7.2) auftretenden $d^P_{\mu i}$ gleich Null, und (7.2) ist trivial.

Sind R und S p-reguläre Elemente von $\mathfrak{N}(P)$ bzw. $\mathfrak{N}(Q)$, multipliziert man (7.2) mit $\bar{\varphi}_i^P(R)\, \varphi_j^Q(S)$ und addiert über alle i und j, so findet man die folgende Verschärfung der Orthogonalitätsrelationen für Gruppencharaktere:

(7C) *Es sei B ein Block von $\mathfrak{G}$, es seien L und M zwei Elemente von $\mathfrak{G}$, die zu verschiedenen Sektionen gehören. Dann ist*

$$\sum_{\chi \in B} \bar{\chi}(L)\, \chi(M) = 0.$$

(7D) *Es seien $B_1, B_2, \ldots, B_t$ die Blöcke von $\mathfrak{G}$, und es sei $P_1, P_2, \ldots, P_r$ ein Vertretersystem für die p-Klassen von $\mathfrak{G}$. Für jedes p-Element P bezeichne $l_\tau(P)$ die Anzahl der irreduziblen Charaktere φ_ϱ^P von $\mathfrak{N}(P)$, die zu Blöcken $\widetilde{B}$ von $\mathfrak{N}(P)$ mit $\widetilde{B}^{\mathfrak{G}} = B_\tau$ gehören. Dann ist die Anzahl k_τ der Charaktere $\chi_i \in B_\tau$ gegeben durch*

$$k_\tau = \sum_{i=1}^{r} l_\tau(P_i). \tag{7.3}$$

Beweis. Die Summe auf der rechten Seite von (7.3) sei mit k'_τ bezeichnet. Für jedes φ_j^P definiere man eine Klassenfunktion ψ_j^P in $\mathfrak{G}$ durch die Festsetzung

$$\psi_j^P(PR) = \varphi_j^P(R) \qquad \text{für } p\text{-reguläres } R \in \mathfrak{N}(P),$$
$$\psi_j^P(G) = 0 \qquad \text{für alle } G \notin \mathfrak{S}(P).$$

Dann besagen die Formeln (7.1), daß die k_τ Charaktere $\chi_i \in B_\tau$ Linearkombinationen von k'_τ geeigneten Funktionen ψ_j^P sind. Da die χ_i linear unabhängig sind, ist also

$$k_\tau \leqq k'_\tau. \tag{7.4}$$

Andererseits ist $\sum_\tau l_\tau(P)$ die Anzahl aller irreduziblen modularen Charaktere

φ_j^P von P, also gleich der Anzahl $l(P)$ der p-regulären Klassen von $\mathfrak{N}(P)$. Unter Verwendung von (3.8) und (4.8) ergibt sich

$$\sum_\tau k'_\tau = \sum_\tau \sum_i l_\tau(P_i) = \sum_i l(P_i) = k = \sum_\tau k_\tau .$$

Also muß in (7.4) für alle τ Gleichheit gelten. Dies liefert (7.3).

Man betrachte die Zahlen d_{ij}^P mit festem P und j als eine Spalte $\mathfrak{d}_j^P$ der Länge k; $i = 1, 2, \ldots, k$. Dann besagen die Formeln (3.2), daß bei geeigneter Anordnung der Klassen die Matrix $(\chi_i(G_j)) = \boldsymbol{\chi}$ der Gruppencharaktere $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$ sich als Produkt

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{\varphi}$$

schreiben läßt, wo $\boldsymbol{D}$ die aus den k Spalten $\mathfrak{d}_j^P$ mit $P = P_1, P_2, \ldots, P_r$ gebildete Matrix ist, während $\boldsymbol{\varphi}$ die direkte Summe der Matrizen $\boldsymbol{\varphi}^P$ für $P = P_1, P_2, \ldots, P_r$ ist. Hierbei ist $\boldsymbol{\varphi}^P$ wie in § 3 definiert. Übrigens folgt aus (3.3) und (3.4) ohne Schwierigkeiten, daß $\pm(\mathrm{Det}\,\boldsymbol{D})^2$ eine Potenz von p ist. Andererseits ist leicht zu sehen, daß $(\mathrm{Det}\,\boldsymbol{\varphi})^2$ eine zu p teilerfremde ganze Zahl ist.

Bildet man aus den Zahlen d_{ij}^P mit festem P und j und $\chi_i \in B_\tau$ eine Spalte $\mathfrak{d}_{\tau j}^P$ der Länge k_τ, so hat man nach (7D) k_τ Spalten $\mathfrak{d}_{\tau j}^P$, für die P eins der Elemente $P_1, P_2, \ldots, P_r$ ist und φ_j^P zu einem Block $\widetilde{B}$ von $\mathfrak{N}(P)$ mit $\widetilde{B}^{\mathfrak{B}} = B$ gehört. Es sei $\boldsymbol{D}_\tau$ die aus diesen k_τ Spalten gebildete Matrix vom Grade $\bar{k}_\tau$. Dann besagt (6A), daß man die Spalten von $\boldsymbol{D}$ so permutieren kann, daß $\boldsymbol{D}$ in die direkte Summe von $\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2, \ldots, \boldsymbol{D}_l$ übergeht. Insbesondere ist $\pm(\mathrm{Det}\,\boldsymbol{D}_\tau)^2$ eine Potenz von p.

Wir nennen $\boldsymbol{D}_\tau$ *die zum Block B_τ gehörige Matrix von verallgemeinerten Zerlegungszahlen.*

(7E) *Ist $\boldsymbol{D}_\tau$ die zum Block B_τ gehörige Matrix von verallgemeinerten Zerlegungszahlen, so ist $\boldsymbol{D}_\tau$ eine quadratische Matrix und $\pm(\mathrm{Det}\,\boldsymbol{D}_\tau)^2$ eine Potenz von p.*

Gelegentlich ist es zweckmäßig, zum Block B_τ alle irreduziblen modularen Charaktere von $\mathfrak{N}(P_1), \mathfrak{N}(P_2), \ldots, \mathfrak{N}(P_r)$ zu rechnen, die den Spalten von $\boldsymbol{D}_\tau$ entsprechen. Dann besteht also B_τ aus k_τ gewöhnlichen irreduziblen Charakteren χ_i und k_τ irreduziblen modularen Charakteren φ_j^P. Dabei kann aber derselbe Charakter φ mehrfach, nämlich für mehrere verschiedene P auftreten. Für $P = 1$ erhält man die im ursprünglichen Sinn zu B_τ gerechneten modularen Charaktere.

Haben Ω_0 und Ω_1 dieselbe Bedeutung wie in § 3, und ist σ ein Element der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{g}$ von Ω über Ω_0, so folgt aus (3.7), daß bei Anwendung von σ auf $\boldsymbol{D}_\tau$ die Zeilen der Matrix permutiert werden. Ist ε eine primitive p^a-te Einheitswurzel, so hat man weiterhin

$$\varepsilon^\sigma = \varepsilon^s$$

mit ganzem rationalem, zu p teilerfremdem s. Daraus folgt, daß für p-Elemente P und p-reguläres $R \in \mathfrak{N}(P)$ die Gleichung gilt

$$\chi_i(PR)^\sigma = \chi_i(P^s R). \tag{7.5}$$

Für jedes $P = P_1, P_2, \ldots, P_r$ ist natürlich P^s zu einem Element desselben Vertretersystems konjugiert. Jetzt zeigt (6A) zusammen mit (3.2) und (3.10), daß man die Anwendung von σ auf $\boldsymbol{D}_\tau$ auch als eine Permutation der Spalten ansehen kann. Wegen Det $\boldsymbol{D}_\tau \neq 0$ kann die Methode aus § 6 und § 7 der unter [3]) zitierten Arbeit angewendet werden. Dies liefert die folgenden Ergebnisse:

(7F) *Es sei Λ ein Teilkörper von Ω; es sei ε_0 eine primitive g_0-te Einheitswurzel (für $g = p^a g_0$ mit $(g_0, p) = 1$). Besteht der Block $B = B_\tau$ aus m Familien von Charakteren χ_i, die bezüglich $\Lambda(\varepsilon_0)$ algebraisch konjugiert sind, so verteilen sich die Spalten der zugehörigen Matrix $\boldsymbol{D}_\tau$ auf m Familien, die bezüglich Λ algebraisch konjugiert sind.*

(7G) *Es sei $p \neq 2$. Bestehen die m Familien von Charakteren χ_i in* (7F) *aus $q_1, q_2, \ldots,$ bzw. q_m Mitgliedern, so bestehen die m Familien von Spalten von $\boldsymbol{D}_\tau$ ebenfalls gerade aus $q_1, q_2, \ldots,$ bzw. q_m Mitgliedern. Dies gilt auch für $p = 2$, $a \leqq 2$. Ist $p = 2$, $a \geqq 3$, so gilt es, falls $\sqrt{-1} \in \Lambda$ ist.*

Die $l_\tau = l_\tau(1)$ zur Sektion $\mathfrak{S}(1)$ gehörigen Spalten von $\boldsymbol{D}_\tau$ haben rationale Koeffizienten, da die d_{ij} in I § 3 rational sind. Es sei $p \neq 2$, Λ der Körper der rationalen Zahlen. Dann müssen mindestens l_τ Charaktere $\chi_i \in B_\tau$ in Ω_0 liegen. Das liefert das Ergebnis:

(7H) *Ist $p \neq 2$ und besteht der Block B_τ aus l_τ modularen Charakteren φ (im ursprünglichen Sinn), so liegen mindestens l_τ Charaktere χ_i von B_τ im Körper der g_0-ten Einheitswurzeln.*

Ähnliche Aussagen kann man bei beliebiger Wahl von Λ machen. Enthält Λ die p^e-ten Einheitswurzeln, so liegen jedenfalls alle Spalten $\mathfrak{d}_j^P$ in Λ, für die P höchstens die Ordnung p^e hat.

Dept. of Mathematics, Harvard University, Cambridge 38, Mass. (U.S.A.)
und
Tata Institute for Fundamental Research, Bombay
(Eingegangen am 7. März 1959)

Walsh, J. L.
Math. Zeitschr. 72, 47–52 (1959)

Note on approximation by bounded analytic functions (Problem α)

Dedicated to the memory of Leon Lichtenstein

By
J. L. Walsh *)

In the theory of approximation by analytic functions in the plane of the complex variable, Problem α is the study of the relation between degree of approximation on a point set E to the continuity properties on E of the function $f(z)$ approximated. In this study, inequalities of the form ($n=1, 2, \ldots$; $p \geqq 0$, $0<\alpha \leqq 1$)

$$|f(z)-f_n(z)| \leqq A_1/n^{p+\alpha}, \quad z \text{ on } E, \tag{1}$$

$$|f_n(z)| \leqq A_2 R^n, \quad z \text{ in } D, \tag{2}$$

where p is integral and D is a region containing E, are especially important; these inequalities are clearly invariant under one-to-one conformal transformation of D.

The object of the present note is to indicate (Theorem 1) a relationship between (1) and (2) on the one hand to approximation to $f(z)$ on E by polynomials on the other hand. The importance of this relationship lies in (i) the extensive theory already in existence concerning Problem α for polynomials, and (ii) the possibility of effectively enlarging a given region D by modifying the $f_n(z)$, using here the fact that polynomials have no singularity in the plane of finite points. Although the isolation of Theorem 1 as such is new, the basic ideas of the proof go back to Curtiss [1]; compare also Walsh and Sewell [2], and the present writer [3].

Theorem 1. *Let the point set E consist of a finite number of mutually disjoint closed Jordan arcs and regions, and let D be an open set containing E. Let the function $f(z)$ be defined on E, let the functions $f_n(z)$ be analytic on D, and let (1) and (2) be satisfied. Then there exist polynomials $p_n(z)$ of respective degrees n such that we have*

$$|f(z)-p_n(z)| \leqq A_3/n^{p+\alpha}, \quad z \text{ on } E. \tag{3}$$

The numbers A with subscripts represent constants independent of n and z.

We denote by $g(z)$ the function of Green for the complement K of E with pole at infinity, and denote generically by C_σ the locus $g(z)=\log\sigma$, $<\sigma$, in K. Let E_σ denote the subset $0<g(z)<\sigma$ of K, plus E. Then for a suitably chosen ϱ_1 (>1) the point set $C_{\varrho_1}+E_{\varrho_1}$ lies in D.

*) This research was sponsored (in part) by the U. S. Air Force, Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command.

There exists [4, § 4.5] for every n a sequence of polynomials $P_{n,k}(z)$ of respective degrees k defined by interpolation to $f_n(z)$ such that we have by virtue of (2)

$$|f_n(z) - P_{n,k}(z)| \leqq A_4 R^n/\varrho^k, \quad z \text{ on } E, \quad \varrho > 1; \tag{4}$$

here A_4 is chosen to be independent of k, n, and z. We now choose the positive integer λ so that $\varrho^\lambda > R$, whence

$$|f_n(z) - P_{n,\lambda n}(z)| \leqq A_4 (R/\varrho^\lambda)^n, \quad z \text{ on } E, \tag{5}$$

with $R/\varrho^\lambda < 1$. From (1) and (5) there follows

$$|f(z) - P_{n,\lambda n}(z)| \leqq A_5/(\lambda n)^{p+\alpha}, \quad z \text{ on } E. \tag{6}$$

The polynomials $P_{n,\lambda n}(z)$ are defined only for the degrees $k = \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \ldots$, but if we now set

$$p_k(z) \equiv P_{n,\lambda n}(z), \quad \lambda n \leqq k < \lambda(n+1),$$
$$p_k(z) \equiv 0, \quad 1 \leqq k < \lambda,$$

the polynomials $p_k(z)$ are defined for all k ($\geqq 1$), and (3) follows from (6).

It follows from (3) that the polynomials $p_n(z)$ are uniformly bounded on E:

$$|p_n(z)| \leqq A_6, \quad z \text{ on } E, \tag{7}$$

and then it follows by the generalized Bernstein lemma [4, § 4.6] that we have ($\sigma > 1$)

$$|p_n(z)| \leqq A_6 \sigma^n, \quad z \text{ on } E_\sigma. \tag{8}$$

Thus Theorem 1 not merely enables us to replace the given analytic functions $f_n(z)$ by the simpler polynomials $p_n(z)$, but also through (3) and (8) it preserves the essence of (1) and (2); if we choose σ sufficiently large, inequality (8) is valid on any preassigned bounded point set of the plane.

The precise form of (1) and (3) as given includes the most frequently used measure of approximation, but the power of Theorem 1 is essentially greater. Inspection of the proof of Theorem 1 yields the

COROLLARY. *Let Theorem 1 be modified so that in the hypothesis the second member of* (1) *is replaced by* ε_n. *Then* (3) *remains valid if the second member is replaced by* $\varepsilon_{[n/\lambda]} + A_7 r^n$, *where* λ *is a suitably chosen positive integer and* r (< 1) *is suitably chosen. Here* $[x]$ *indicates the greatest integer not greater than* x.

In this Corollary the magnitudes of λ and r can be expressed in terms of ϱ if a suitable ϱ is known. In the statements of Theorem 1 and the Corollary the set E is unnecessarily restricted; it is sufficient if E is a closed bounded set whose complement K is connected and regular in the sense that it possesses a GREEN'S function $g(z)$ with pole at infinity.

As an illustration of the usefulness of Theorem 1 we prove the following known [1, 2] result:

THEOREM 2. *Let* $C_1, C_2, \ldots, C_\nu$ *be mutually exterior analytic Jordan curves and let the function* $f(z)$ *be analytic in the interior of each* C_j, *continuous in the*

corresponding closed region B_j. A necessary and sufficient condition that $f(z)$ be of class $L(p, \alpha)$, $0<\alpha<1$, on $E = B_1 + B_2 + \cdots + B_\nu$ is that there exist polynomials $p_n(z)$ of respective degrees n satisfying (3).

The class $L(p, \alpha)$ on B_j indicates that $f(z)$ is analytic interior to B_j, continuous in B_j, and that $f^{(p)}(z)$ exists in the one-dimensional sense on C_j and satisfies there a Lipschitz condition of order α. This class is known to be invariant under a conformal transformation of B_j.

The condition of Theorem 2 is necessary, for if $f(z)$ is of class $L(p, \alpha)$ on B_j, we transform conformally B_j onto $\gamma: |w| \leqq 1$ by the transformation $w = \varphi_j(z)$, $z = \psi_j(w)$, which is one-to-one and conformal on open sets containing B_j and γ respectively. Then $f[\psi_j(w)]$ is of class $L(p, \alpha)$ on γ, and it follows from the Jackson-Bernstein-Montel-de la Vallée Poussin theory of trigonometric approximation that there exist trigonometric polynomials $T_{j,n}(\vartheta)$ of respective degrees n such that we have $w = e^{i\vartheta}$,

$$|f[\psi_j(e^{i\vartheta})] - T_{j,n}(\vartheta)| \leqq A_8/n^{p+\alpha}. \tag{9}$$

The polynomial $T_{j,n}(\vartheta)$ is (EULER) a polynomial of degree n in w and $1/w$. But $T_{j,n}(\vartheta)$ is found by a summation process from the Fourier development of $f[\psi_j(e^{i\vartheta})]$, and by the analyticity of $f[\psi_j(w)]$ in $|w|<1$ this development is of power series type and lacks the terms in $1/w$. That is to say, with $w = e^{i\vartheta}$ we may write $T_{j,n}(\vartheta) = t_{j,n}(w)$, where $t_{j,n}(w)$ is a polynomial in w of degree n. The relation (9) becomes

$$|f[\psi_j(w)] - t_{j,n}(w)| \leqq A_8/n^{p+\alpha}, \tag{10}$$

valid for $|w| = 1$ and hence for $|w| \leqq 1$.

It is a consequence of (10) that the polynomials $t_{j,n}(w)$ are bounded on γ independently of j and n:

$$|t_{j,n}(w)| \leqq A_9, \quad |w| \leqq 1, \tag{11}$$

and then a consequence of the generalized Bernstein Lemma [4, § 4.6] that we have for arbitrary R (>1)

$$|t_{j,n}(w)| \leqq A_9 R^n, \quad |w| \leqq R. \tag{12}$$

If R is chosen sufficiently near unity, the image B_j' of $|w| \leqq R$ under each of the ν transformations $z = \psi_j(w)$ is one to one and the B_j' are mutually disjoint. The hypothesis of Theorem 1 is satisfied with $f_n(z) = t_{j,n}[\varphi_j(z)]$ in B_j', for (10) is equivalent to (1), and (12) to (2). Then (3) follows from Theorem 1.

Conversely, suppose (3) is satisfied; again we have by (3) the analogue of (11):

$$|p_n(z)| \leqq A_{10}, \quad z \text{ on } E.$$

From the generalized Bernstein Lemma we deduce

$$|p_n(z)| \leqq A_{10} R^n, \quad z \text{ on } E_R. \tag{13}$$

Inequality (3) can be written

$$|f[\psi_j(w)] - p_n[\psi_j(w)]| \leqq A_3/n^{p+\alpha}, \quad w \text{ on } \gamma,$$

so if (13) is interpreted in a suitable region of the w-plane containing γ, the hypothesis of Theorem 1 is satisfied, and we have

$$|f[\psi_j(w)] - P_{j,n}(w)| \leqq A_{11}/n^{p+\alpha}, \quad w \text{ on } \gamma, \tag{14}$$

where $P_{j,n}(w)$ is a polynomial in w of degree n. It is now a consequence of the theory of trigonometric approximation already mentioned that $d^p f[\psi_j(e^{i\vartheta})]/d\vartheta^p$ exists and satisfies a Lipschitz condition of order α on $|w| = 1$, so $f[\psi_j(w)]$ is of class $L(p, \alpha)$ on γ, and $f(z)$ is of class $L(p, \alpha)$ on each B_j and on E. Theorem 2 is established.

Under the hypothesis of Theorem 2 on E, if D is any bounded region containing E in its interior, inequalities (1) and (2) with suitable $f_n(z)$ are by (8) and Theorem 1 necessary and sufficient [3] that $f(z)$ be of class $L(p, \alpha)$ on E.

In Theorem 2 the necessity of condition (3) holds for $\alpha = 1$ but not the sufficiency. With $\alpha = 1$, condition (3) is necessary and sufficient that $f^{(p)}(z)$ be of class A^* on E, as follows [5, 6] by the method of proof already used. Here A^* denotes a class of functions whose properties regarding degree of trigonometric approximation were first studied by ZYGMUND.

Just as Theorem 2 follows from Theorem 1, extensions of the two parts of Theorem 2 follow from the Corollary. Such extensions exist already in the literature [5, 6, 8], but the present suggested proof is simpler and tends to unify the theory.

Theorem 1 is of significance in pointing the way to an analogue of Theorem 2 but where now E is an analytic Jordan arc. The relationship of inequality (3) to the continuity properties of $f(z)$ on E may be studied by mapping a region containing E onto a region containing the segment $-1 \leqq w \leqq 1$ so that E is transformed into the segment; Theorem 1 and its Corollary apply in the w-plane. For such an application of Theorem 1, compare [3, Theorem 5].

Theorem 1 admits an analogue dealing with approximation on a Jordan curve rather than on Jordan regions or arcs:

THEOREM 3. *Let E be an analytic Jordan curve containing the origin 0 in its interior, and let D be a region containing E. Let the function $f(z)$ be defined on E, let the functions $f_n(z)$ be analytic in D, and let (1) and (2) be satisfied. Then there exist polynomials $p_n(z, 1/z)$ in z and $1/z$ of respective degrees n such that*

$$|f(z) - p_n(z, 1/z)| \leqq A_{12}/n^{p+\alpha}, \quad z \text{ on } E, \tag{15}$$

is satisfied.

The functions $f_n(z)$ are analytic in a closed annular region D_1 containing E bounded by two rectifiable Jordan curves, J_1 exterior to E and J_2 interior

to E. Then for z interior to D_1 the function $f_n(z)$ is represented as the sum of two integrals taken in the positive sense with respect to D_1:

$$f_n(z) \equiv f_{n1}(z) + f_{n2}(z), \tag{16}$$

$$f_{n1}(z) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{J_1} \frac{f_n(t)\,dt}{t-z}, \quad f_{n2}(z) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{J_2} \frac{f_n(t)\,dt}{t-z}, \tag{17}$$

where $f_{n1}(z)$ is analytic throughout the interior of J_1 and $f_{n2}(z)$ is analytic throughout the exterior of J_2 even at infinity. Let $g'(z)$ be GREEN's function for the interior of E with pole in 0, and let C'_σ denote generically the locus $g'(z) = \log\sigma$, $1<\sigma$, interior to E. In the notation used in the proof of Theorem 1, there follow from (2) and (17) the inequalities

$$|f_{n1}(z)| \leqq A_{13}R^n, \quad |f_{n2}(z)| \leqq A_{13}R^n, \tag{18}$$

respectively on any closed set interior to J_1 and on any closed set exterior to J_2; we choose these sets to be closed Jordan regions containing in their interiors the closed interior of C_ϱ and closed exterior of C'_ϱ respectively, where ϱ (>1) is suitably chosen.

By the method of proof of (4), now by use of (18), there exists for every n a sequence of polynomials $P_{n,k}(z)$ in z of degrees k and of polynomials $Q_{n,k}(1/z)$ in $1/z$ of degrees k such that we have

$$|f_{n1}(z) - P_{n,k}(z)| \leqq A_{14}R^n/\varrho^k, \quad z \text{ on } E,$$
$$|f_{n2}(z) - Q_{n,k}(1/z)| \leqq A_{14}R^n/\varrho^k, \quad z \text{ on } E;$$

here A_{14} is independent of k, n, and z. The proof of Theorem 3 now follows the proof of Theorem 1.

Theorem 3, and a Corollary analogous to that of Theorem 1, can be quite useful in the study of degree of approximation by polynomials on an analytic Jordan curve rather than in a closed Jordan region, to prove analogues and extensions of Theorem 2 [7, 8]. In particular, it follows that if E is an analytic Jordan curve containing the origin in its interior, and if the function $f(z)$ is defined on E, then (15) is necessary and sufficient that $f^{(p)}(z)$ exist and satisfy a LIPSCHITZ $(0<\alpha<1)$ or ZYGMUND $(\alpha=1)$ condition on E.

Theorem 3 obviously admits an extension: a function $f(z)$ approximated on a closed point set E whose complement consists of a finite number of regions $K_1, K_2, \ldots, K_\nu$ each bounded by a finite number of mutually disjoint analytic Jordan curves, by functions $f_n(z)$ analytic on an open set D containing E which satisfy (1) and (2), can also be approximated on E by rational functions $r_n(z)$ of respective degrees $n\nu$ whose poles (each of order not greater than n) lie in ν preassigned points β_j in the respective regions K_j, so that we have

$$|f(z) - r_n(z)| \leqq A/n^{p+\alpha}, \quad z \text{ on } E. \tag{19}$$

Conversely, of course (19) implies (1) and (2) with $r_n(z) \equiv f_n(z)$, where D is an arbitrary bounded set containing E and to which the β_k are exterior.

Theorems 1 and 3, extended by replacing the second member of (1) by ε and the second members of (3) and (15) by $A_0\varepsilon_{[n/\lambda]}+A_0'r^n$, also remain vali if the first members of (1), (3), and (15) are replaced by integrals of thei respective p^{th} powers ($p>0$) over the boundary of E. Theorem 1 can b correspondingly extended if E consists of a finite number of mutually disjoin Jordan regions and the first members of (1) and (3) are replaced by integral of their respective p^{th} powers ($p>0$) over E.

The foregoing considerations apply, with suitable modifications, to ap proximation by harmonic polynomials, as the writer plans to indicate or another occasion.

References

[1] Curtiss, J. H.: A note on the degree of polynomial approximation. Bull. Amer Math. Soc. **42**, 873—878 (1936). — [2] Walsh, J. L., and W. E. Sewell: Note on the relation between continuity and degree of polynomial approximation in the complex domain. Bull. Amer. Math. Soc. **43**, 557—563 (1937). — [3] Walsh, J. L.: Note on approximation by bounded analytic functions. Proc. Nat. Acad. Sci. (U.S.A.) **37**, 821—826 (1951). — [4] Walsh, J. L.: Interpolation and Approximation. New York 1935. — [5] Walsh, J. L., and H. M. Elliott: Polynomial approximation to harmonic and analytic functions: generalized continuity conditions. Trans. Amer. Math. Soc. **68**, 183—203 (1950). — [6] Elliott, H. M.: On approximation to functions satisfying a generalized continuity condition. Trans. Amer. Math. Soc. **71**, 1—23 (1951). — [7] Walsh, J. L. Degree of approximation to functions on a Jordan curve. Trans. Amer. Math. Soc. **73**, 447—458 (1952). — [8] Walsh, J. L., and H. M. Elliott: Degree of approximation on a Jordan curve. Proc. Nat. Acad. Sci. (U.S.A.) **38**, 1058—1066 (1952).

Dept. of Mathematics, Harvard University, Cambridge, Mass. (U.S.A.)

(Eingegangen am 15. September 1958)

Loewner, C.
Math. Zeitschr. 72, 53—60 (1959)

A theorem on the partial order derived from a certain transformation semigroup[1])

In memoriam Leon Lichtenstein

By
Charles Loewner

With every semigroup Γ of transformation of a set D into itself a partial order is connected: We write $x < y$ for two elements of D if there exists a transformation of Γ mapping x into y. This relation between two elements of D is transitive on account of the semigroup property of Γ. If Γ contains the identity mapping the order relation is reflexive and it is antisymmetric if the further condition is satisfied that existence of transformations in Γ mapping x into y and y into x respectively implies $x = y$.

We shall be concerned with a semigroup of transformations which are finite dimensional analogues of mappings in function space arising in the study of linear parabolic partial differential equations

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathfrak{L}_t(f). \tag{1}$$

The right hand side of (1) is supposed to represent for each value of the "time" variable t of an interval $\langle a, b\rangle$ a linear differential operator in spatial variables $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ varying in a fixed spatial domain Δ[2]). Now let us assume that some time-independent linear homogeneous boundary conditions have been introduced which guarantee a unique solution of (1) for sufficiently regular initial values at $t = a$. Then the transition from the initial values to the end values at $t = b$ of a solution may be considered as a mapping in the space of functions in Δ satisfying the given boundary conditions, *generated by infinitesimal transformations in this function space*. The right hand side of (1) gives the one-parameter family of infinitesimal transformations generating the transformation.

In important problems in the theory of parabolic partial differential equations the following conditions are satisfied:

(a') $\mathfrak{L}_t(f)$ is, for each $t \in \langle a, b\rangle$, self-adjoint with respect to the given boundary conditions, i.e., with dv being the volume element of Δ

$$\int_\Delta f\, \mathfrak{L}_t(g)\, dv = \int_\Delta g\, \mathfrak{L}_t(f)\, dv$$

for any pair of functions f and g in Δ satisfying the given boundary conditions.

[1]) This research was supported by a National Science Foundation Grant, N.S.F.-03020.

[2]) All variables are supposed to be real.

(b′) The mappings generated are *positivity preserving*, i.e., non-negative initial values produce non-negative solutions throughout.

(c′) The integral $\int_{\Delta} f(v, t)\, dv$ taken for a solution of (1) is independent of t.

It is of interest to study those properties of the system of mappings generated by all differential equations of this type. This system is clearly a semigroup. We will consider here only the finite dimensional analogue of this problem and answer a question regarding the associated partial order. We replace the function f by a vector $u = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$ in a space E^{n+1} and correspondingly equation (1) by the differential equation

$$\frac{du}{dt} = A(t)\, u \tag{2}$$

where $A(t)$ represents an in general time-dependent linear operator (or the corresponding matrix in a specified coordinate system). We shall assume that $A(t)$ is $\mathfrak{L}_1$-integrable in $\langle a, b\rangle$ (i.e., all elements of the matrix $A(t)$ are $\mathfrak{L}_1$-integrable functions of t in $\langle a, b\rangle$). Then there exists a unique absolutely continuous function $u(t)$ satisfying (2) almost everywhere and having a given initial value $u(a)$. The transition from $u(a)$ to the end value $u(b)$ represents the linear mapping generated by the infinitesimal transformations described by the right hand side of (2).

Corresponding to the conditions (a′), (b′) and (c′) we subject $A(t)$ to the following restrictions:

(a) For each t the matrix $A(t)$ is symmetric.

(b) Calling a vector u positive if all its components are non-negative we require that a positive initial value $u(a)$ leads to a positive solution $u(t)$ throughout. One easily sees that this condition is expressed by the following inequalities for the elements of $A(t) = (a_{ij}(t))$

$$a_{ij}(t) \geqq 0 \quad (i \neq j) \text{ almost everywhere.} \tag{3}$$

(c) The sum $\sum_{i=0}^{n} u_i(t)$ of the components of a solution $u(t)$ of (2) is constant. This is expressed by the equations

$$\sum_{\varrho=0}^{n} a_{i\varrho}(t) = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, n) \text{ almost everywhere.} \tag{4}$$

We form the totality of mappings generated by differential equations satisfying the conditions (a), (b) and (c) and add to them all limiting transformation using the ordinary topology in the matrix space. We obtain so a topologically closed semigroup Γ of linear mappings and we are interested in the partial order in the $(n+1)$-dimensional vector space connected with it. We shall answer in this paper the following question: *Which vectors u follow, in the sense of the adopted order, the vector $e = (1, 0, 0, \ldots, 0)$?* This is the finite dimensional analogue of the study of those properties of the GREEN'S functions of parabolic differential equations common to all equations (2) satisfying the conditions (a′), (b′) and (c′).

We will describe the answer we shall obtain. Since the coordinates of each successor of e satisfy the equation $\sum_{i=0}^{n} u_i = 1$ we can eliminate u_0 and operate in the space E^n of the coordinates $u_1, u_2, \ldots, u_n$ which we call then successively $x_1, x_2, \ldots, x_n$. The order relation can then be transferred from E^{n+1} to E^n and we are then interested in the successors of the origin 0 of E^n. Let $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ be a system of p different indices from the sequence $1, 2, \ldots, n$ and introduce the point $p^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}$ with the coordinates

$$(5) \qquad x_{\alpha_1} = \frac{1}{2}, \quad x_{\alpha_2} = \frac{1}{2^2}, \ldots, x_{\alpha_p} = \frac{1}{2^p}, \qquad x_i = 0 \ (i \neq \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)^3).$$

We shall show that the points $p^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}$ form the vertices of an n-dimensional *convex* polyhedron B and prove the

THEOREM. *A point x is successor of 0 if and only if it belongs to B.*

§ 1. Sufficiency proof

We shall need several geometrical lemmas which we will prove first. Let $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$ be a system of n real numbers and form the set V of the points $p^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} = (a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots, a_{\alpha_n})$ in E^n where $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ranges over all permutations of $(1, 2, \ldots, n)$. Then we prove

LEMMA 1. *The least convex closure of V is a polyhedron P in the hyperplane $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$ with the points of V as vertices.*

PROOF. We have to show that none of the points of V can be represented as a linear combination of other points of V with positive coefficients whose sum equals 1. Without loss of generality we can take the point $p^{12\ldots n}$. Suppose our assertion is false and $p^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n}$ any of the points appearing in the linear combination. Since the first coordinate of all points of V are $\leqq a_1$, but the first coordinate of $p^{12\ldots n}$ equals a_1, we see that the first coordinate of $p^{\beta_1 \ldots \beta_n}$ must also be a_1. The second coordinates of the points of V whose first coordinate equals a_1 cannot surpass a_2, but the second coordinate of $p^{12\ldots n}$ equals a_2. Again we conclude that the second coordinate of $p^{\beta_1 \ldots \beta_n}$ must be a_2. By continuation of this procedure we finally arrive at the fact that $p^{\beta_1 \ldots \beta_n}$ coincide with $p^{12\ldots n}$ which contradicts our assumption.

LEMMA 2. *A point x belongs to P if and only if its coordinates satisfy the inequalities*

$$(6) \quad (x_{\alpha_1} - a_1) + (x_{\alpha_2} - a_2) + \cdots + (x_{\alpha_i} - a_i) \leqq 0 \qquad (1 \leqq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_i \leqq n)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

and the equation

$$(6') \qquad (x_1 - a_1) + (x_2 - a_2) + \cdots + (x_n - a_n) = 0.$$

PROOF. That these conditions are necessary follows immediately from the fact that they are satisfied by the vertices of P, and convexity of P. In order

[3]) If $p = 0$ the corresponding point is the origin.

to prove the sufficiency we determine all hyperplanes of support through the vertices. Since P is a polyhedron they form the totality of hyperplanes of support of P. We write the equation of a hyperplane of support $L(x)=0$ always so that $L(x)\leqq 0$ in P. Again, without loss of generality we may restrict ourselves to the vertex $p^{12\cdots n}$. Let

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i-a_i)=0 \tag{7}$$

be the equation of a hyperplane of support through $p^{12\cdots n}$. This is the case if and only if the left side of (7) is non-positive for all vertices of P, i.e., if

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(a_{\alpha_i}-a_i)\leqq 0 \tag{8}$$

for all $n!$ permutations $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ of $(1, 2, \ldots, n)$. Let us first assume that strictly $a_1>a_2>\cdots>a_n$. Substituting for the permutation the transposition which interchanges the indices i and $i+1$ we obtain

$$c_i\geqq c_{i+1} \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1). \tag{9}$$

We set

$$L_i(x)=\sum_{k=1}^{i}(x_k-a_k) \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

and write

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n}(c_i-c_{i+1})\,L_i(x) \tag{11}$$

in which formula $c_{n-1}=0$ is to be substituted. Evidently $L_i(x)=0$ $(i=1, \ldots, n)$ represent hyperplanes of support at $p^{12\cdots n}$ since $L_i(x)$ is non-positive for all vertices of P and vanishes at $p^{12\cdots n}$, and $L_n(x)$ even vanishes in P identically. Hence, inequalities (9) are necessary and sufficient for the equation of a hyperplane of support through $p^{12\cdots n}$ and $L(x)\leqq 0$ in P is then already a consequence of $L_i(x)\leqq 0$ $(i=1, \ldots, n-1)$.

Applying these considerations for all vertices of P we obtain a proof of Lemma 2 under the assumption $a_1>a_2>\cdots>a_n$. The general case $a_1\geqq a_2\geqq \cdots\geqq a_n$ is then obtained by a simple limiting process.

Let again $a_1\geqq a_2\geqq\cdots\geqq a_n\geqq 0$ be a system of real numbers which are now supposed to be *non-negative*, but not all zero. We associate with them a set W of points $p^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m}$ in E^n, containing the previously defined set V as a subset, by the following definition: Let $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ be any permutation of $m\leqq n$ indices from $(1, 2, \ldots, n)$. Then the coordinates of $p^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m}$ are

$$x_{\alpha_1}=a_1,\ x_{\alpha_2}=a_2, \ldots, x_{\alpha_m}=a_m, \qquad x_i=0\ (i\neq\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \tag{12}$$

W contains also the origin which corresponds to $m=0$. We prove

LEMMA 3. *The least convex closure of W is a polyhedron B with the points of W as vertices.*

The proof is analogous to that of Lemma 1. We have to show that none of the points of W can be represented as a linear combination of other points of W with positive coefficients whose sum equals 1. We start with $m=0$, i.e., with the origin. Here the assertion is evident since all other points have non-negative coordinates and at least one of them is positive. Now let m be positive. Without loss of generality we may take the point $p^{12\dots m}$. Suppose our assertion is false and $p^{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_q}$ any of the points appearing in the linear combination. Since the first coordinates of all points of W are $\leqq a_1$ but the first coordinate of $p^{12\dots m}$ equals a_1 we see that the first coordinate of $p^{\beta_1\dots\beta_q}$ must be a_1. The second coordinates of the points of W whose first coordinate equals a_1 cannot surpass a_2, but the second coordinate of $p^{12\dots m}$ is a_2. Again we conclude that the second coordinate of $p^{\beta_1\dots\beta_q}$ is a_2. By continuing this way we finally see that $p^{\beta_1\dots\beta_q}=p^{12\dots m}$, which contradicts our assumption.

Later on we need the intersection of B with a hyperplane $\varepsilon_t\colon \sum_{i=1}^{n} x_i=t$. We may restrict t to the interval $0\leqq t\leqq \sum_{i=1}^{n} a_i$ since otherwise the intersection is empty. We introduce the following *polygons* $\pi^{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}$, $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ being again an arbitrary permutation of $(1,2,\dots,n)$: $\pi^{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}$ connects successively the points 0, p^{α_1}, p^{α_1,α_2}, $\dots$, $p^{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}$. Evidently they all belong to the polyhedron B. We will prove

LEMMA 4. *The intersection of B with ε_t is the least convex closure P_t of the set V_t of the intersection points of ε_t with the polygons $\pi^{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}$.*

PROOF. Since the points of V_t belong to B the whole polyhedron P_t must fall into B. We have to show that no other points of ε_t belong to B. This is proved if through each boundary point of P_t, in the sense of the topology in ε_t, a hyperplane of support for the whole B can be laid. This we will derive from Lemma 2. The intersection point of $\pi^{12\dots n}$ with ε_t has coordinates of the form $(a_1, a_2, a_k, a'_{k-1}, 0\dots 0)$ with $0\leqq a'_{k-1}\leqq a_{k-1}$. Calling these coordinates a'_i, the coordinates of the intersections with all $\pi^{\alpha_1\dots\alpha_n}$ are obtained by all permutations of the a'_i. Call further the linear functions (10), after replacing there the a_k by the a'_k, $L'_i(x)$. According to Lemma 2, through each boundary point of P_t in ε_t a hyperplane can be laid whose equation is obtained from one of the equations $L'_1=0$, $L'_2=0$, $\dots$, $L'_{n-1}=0$ by permutation of the a'_i. Without loss of generality we may assume that this is one of those equations themselves, say $L'_i=0$ $(i<n)$. We now make a distinction:

(a) $i\leqq k$. Here $L'_i\equiv L_i$ and one sees immediately that L'_i is non-positive for all vertices of B and, therefore, $L'_i=0$ is a hyperplane of support for B.

(b) $i>k$. Here $L'_i=-(x_{i+1}+\dots+x_n)$ on P_t and evidently non-positive for all vertices of B. We found, therefore, in $-(x_{i+1}+\dots+x_n)=0$ the equation of a hyperplane of support through the given point. The lemma is now completely proved.

We return to our original problem to determine the successors of 0 in E^n in the sense of adopted order. We introduce the polyhedron B belonging to the values $a_i = \frac{1}{2^i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ and prove first

LEMMA 5. *All points on the polygons $\pi^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$ are successors of 0.*

PROOF. Let $A^{ij} (0 \leqq i < j \leqq n)$ be the matrix of the infinitesimal transformation of Γ belonging to the quadratic form $-(u_i - u_j)^2$. The one parameter semigroup generated by A^{ij} consists of the transformations

$$U^{ij}(t) = I + \frac{1 - e^{-2t}}{2} A^{ij} \qquad (t \geqq 0) \tag{13}$$

which in the limit $t \to \infty$ gives the transformation

$$U^{ij}(\infty) = I + \tfrac{1}{2} A^{ij} \tag{14}$$

which also belongs to Γ. Application of $U^{0\alpha_1}(t)$ $(0 \leqq t \leqq \infty)$ to 0 gives evidently all points of the first segment of $\pi^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$ ending in p^{α_1}. Application of $U^{0\alpha_2}(t)$ $(0 \leqq t \leqq \infty)$ to p^{α_1} leads to all points of the second segment of $\pi^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$ ending in $p^{\alpha_1 \alpha_2}$. Continuation of this procedure yields finally all points of $\pi^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$.

Now let P be a polyhedron defined as in the beginning of this paragraph, constructed from some numbers $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$ $(n \geqq 2)$. We prove

LEMMA 6. *Every point of P is successor of at least one vertex of P, obtained from it by a succession of a finite number of transformations $U^{pq}(t_{pq})$ $(p > 0, q > 0, 0 \leqq t_{pq} \leqq \infty)$.*

PROOF. We prove the lemma first for the boundary points of P, the latter considered as point set in the hyperplane $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$. According to Lemma 2 such a boundary point satisfies one of the equations

$$x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \cdots + x_{\alpha_i} = a_1 + a_2 + \cdots + a_i \qquad (0 \leqq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_i \leqq n)$$

with $i < n$. Without loss of generality we may assume this equation to be $x_1 + x_2 + \cdots + x_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$. The boundary point is a linear combination of the vertices of P with non-negative coefficients whose sum equals 1. The vertices of P are the points $(\alpha_{\beta_1}, \alpha_{\beta_2}, \ldots, \alpha_{\beta_n})$ where $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ runs through all permutations of $(1, 2, \ldots, n)$. Since $a_1, a_2, \ldots, a_i$ are the i greatest among all a's and $x_1 + x_2 + \cdots + x_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$ it is clear that the first i coordinates of any point appearing in the linear combination must have $a_1, a_2, \ldots, a_i$, in some order, as its first i coordinates and therefore $a_{i-1}, \ldots, a_n$ in some order, as its last $n - i$ coordinates. We can now apply complete induction. We assume that the lemma is proved for smaller values of n. Let $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i)$ be any permutation of $(1, 2, \ldots, i)$ and $(\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \ldots, \alpha_n)$ any permutation of $(i+1, i+2, \ldots, n)$. We can first conclude that $(x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ can be obtained from some of the points $(x_1, x_2, \ldots, x_i, a_{\alpha_{i+1}}, \ldots, a_{\alpha_n})$ by a finite succession of transformations $U^{pq}(t)$, $p > i$, $q > i$, since the latter

do not affect the first i coordinates. On the other hand each $(x_1, x_2, \ldots, x_i, a_{\alpha_{i+1}}, \ldots, a_{\alpha_n})$ can be obtained from a vertex $(a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots, a_{\alpha_{i-1}}, \ldots, a_{\alpha_n})$ by a succession of transformations $U^{pq}(t)$, $p \leqq i$, $q \leqq i$. This proved the lemma for a boundary point of P. Take now an *interior* point x of P. Lay through x the line consisting of the points $(x_1+\tau, x_2-\tau, x_2, \ldots, x_n)$ $(-\infty < \tau < \infty)$. It falls completely into the hyperplane $x_1+x_2+\cdots+x_n = a_1+a_2+\cdots+a_n$ and hits the boundary of P in it in two points x^1 and x^2. Now the point x is successor of x^1 or x^2 by a transformation $U^{12}(t)$ $(0 \leqq t \leqq \infty)$. This is simply the assertion of our lemma for $n=2$, which is trivial. Since x^1 and x^2 are successors of some vertex of P the lemma is completely proved. By combination of Lemmas 5, 6 and 4 we obtain the result that every point of B is successor of 0. This completes the sufficiency proof.

§ 2. Necessity proof

We have to show that no point outside of B can be successor of 0. To this end we have to study how the infinitesimal transformations of Γ applied to points on the invariant hyperplane $u_0+u_1+\cdots+u_n=1$ behave after projection into the space E^n of the last n coordinates. Let us designate the infinitesimal transformation in E^n obtained by the projection process from the infinitesimal transformation U of Γ by $\bar{U}$. We have to show that any $\bar{U}$ *contracts* the body B. $\bar{U}$ contracts B if for every boundary point x of B the vector $\bar{U}x$ points toward B. By this is meant that for any hyperplane of support of B at x the vector $\bar{U}x$ laid off from x falls into the half space bounded by the hyperplane and containing B. It is then known that any solution of (2) after projection into E^n with the initial value $x=0$, *which belongs to* B, cannot leave B. We will prove the contraction property. We start with the remark that we may restrict ourselves to vertices of B. Indeed every hyperplane of support contains several vertices. But $\bar{U}x$ is linear in x and every boundary point x of B in the hyperplane is a linear combination of those vertices with *non-negative* coefficients. We make further use of the second remark that every infinitesimal transformation U of Γ is a linear combination of the U^{ij} $(0 \leqq i < j \leqq n)$ with *non-negative* coefficients. Indeed we have, if $U=(u_{ij})$ evidently

$$U = \sum_{i<j} u_{ij} U^{ij}. \tag{15}$$

The two remarks show that it is sufficient to verify the contraction property only for the $\bar{U}^{ij}$ and the vertices of B. We may assume that the vertex x has the form $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^p}, 0, \ldots, 0\right)$ $(0 \leqq p \leqq n)$. We have to show that for all $\bar{U}^{ij}$ the vector $\bar{U}^{ij}x$ laid off from x lies in the cone spanned by the half lines emanating from x and pointing toward the other vertices. Let first i and j be *positive*. Then the i-th and j-th components of $\bar{U}^{ij}x$ are $x_j - x_i$ and $x_i - x_j$ respectively and all other components zero. But the coordinates of x are non-increasing. Therefore the i-th and j-th components of $\bar{U}^{ij}x$ are modulo a non-negative factor equal to -1 and $+1$ respectively and the

vector $\overline{U}^{ij}x$ has the direction of the vector connecting x with the verte obtained from x by interchanging the i-th and j-th coordinates.

Now let $i=0$, $j>0$. One easily computes that only the j-th componen of $\overline{U}^{0j}x$ may not be zero. It equals $1-x_j-\sum_{i=1}^{n}x_i$. We distinguish two cases

(a) $j>p$. Here the j-th component of $\overline{U}^{0j}x$ is $\frac{1}{2^p}>0$ and $\overline{U}^{0j}x$ has th direction of the vector leading from x to the vertex obtained from x by re placing its j-th component by $\frac{1}{2^{p+1}}$.

(b) $j\leqq p$. Here the j-th component of $\overline{U}^{0j}x$ is $\frac{1}{2^p}-\frac{1}{2^j}$. If $j=p$ the vecto $U^{0j}x$ vanishes. If $j<p$ the j-th component of $\overline{U}^{0}x$ is *negative*. We ther introduce two further vertices y and z: y is obtained from x by interchanging the j-th and the p-th components and z is obtained from x by replacing its p-th component by 0. The vector $y-x$ has two non-zero components, namely the j-th and the p-th, which differ from -1 and 1 by the *positive* factor $\frac{1}{2^j}-\frac{1}{2^p}$. The vector $z-x$ has one non-zero component namely the p-th which is $\left(-\frac{1}{2^p}\right)$ which is *negative*. One sees that $\overline{U}^{0j}x$ can be written as a linear combination of $y-x$ and $z-x$ with *positive* coefficients. The contraction property is thus verified in all cases and so the necessity proof completed

Dep. of Math., Stanford University, Stanford, Cal. (U.S.A.)

(Eingegangen am 1. November 1958)

Salié, H.
Math. Zeitschr. 72, 61–75 (1959)

Zum Wertevorrat der Dedekindschen Summen

Meinem verehrten Lehrer Leon Lichtenstein zum Gedächtnis

Von

Hans Salié

Daß für die Summen

$$s(m,n)=\sum_{\nu \bmod n}\left(\left(\frac{\nu}{n}\right)\right)\left(\left(\frac{m\nu}{n}\right)\right),\qquad (m,n)=1,\ n>0, \tag{1}$$

in denen

$$((a))=\begin{cases}0 & \text{für ganzes } a,\\ a-[a]-\frac{1}{2} & \text{sonst}\end{cases}$$

bedeutet, das Reziprozitätsgesetz

$$s(m,n)+s(n,m)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+\frac{1}{mn}\right) \tag{2}$$

besteht, wurde von R. Dedekind [1] aus der Theorie der Modulfunktionen bei der linearen Transformation von $\eta(\omega)$ erschlossen. H. Rademacher [2] bewies später den Zusammenhang zwischen (1) und (2) rein arithmetisch. Seitdem ist eine umfangreiche Literatur[1]) entstanden, die interessante Beziehungen der Dedekindschen Summen $s(m,n)$ und verschiedenen Verallgemeinerungen zu Analysis und Zahlentheorie ergeben hat.

Geht man von den $s(m,n)$ zu den ganzen Zahlen

$$D(m,n)=12n\,s(m,n),\qquad (m,n)=1,\ n>0$$

über, so genügen diese nach (1) und (2) den Bedingungen

$$m\,D(m,n)+n\,D(n,m)=m^2+n^2-3mn+1, \tag{3a}$$

$$D(m',n)=D(m,n),\qquad m'\equiv m \bmod n,\ n>0. \tag{3b}$$

Da $D(m,n)$ durch (3) für alle natürlichen Zahlen m und n eindeutig definiert ist, liegt es nahe, die Eigenschaften von $D(m,n)$ zu studieren, indem man (3) zugrunde legt und die Summendarstellung (1) unberücksichtigt läßt. Bereits Dedekind [1] konnte unter dieser Voraussetzung Beziehungen für $D(m,n)$ auf einfache Weise herleiten.

Die vorliegende Note will Bemerkungen zu dem Wertevorrat machen, den $D(m,n)$ annimmt. Sie verwendet als Baustein für $D(m,n)$ die einfachere Funktion $T(m,n)$, die durch (23) mit $D(m,n)$ verknüpft ist. $T(m,n)$ wird für alle natürlichen m und n eindeutig definiert durch

$$T(m,n)+T(n,m)=\left[\frac{m}{n}\right]+\left[\frac{n}{m}\right]-2,\qquad m>0,\ n>0, \tag{4a}$$

$$T(m',n)=T(m,n),\qquad m'\equiv m \bmod n. \tag{4b}$$

[1]) Vgl. das Literaturverzeichnis in [3].

Nachdem auf Grund dieser Definition ein einfacher Aufbau der Theorie der $T(m, n)$ gegeben worden ist, wird auf $D(m, n)$ eingegangen lediglich unter der Voraussetzung (3) und (4). Bemerkenswert erscheint eine Transformation der m, n, die $D(m, n)$ invariant läßt (Satz 6). Dann werden quadratische Formen für $D(m, n)$ angegeben. Es folgt, daß $D(m, n)$ in jeder der fünf für $D(m, n)$ möglichen Restklassen mod 18 unendlich viele Werte annimmt. Berechnungen zeigen, daß $D(m, n)$ aus diesen Restklassen gewisse Werte wirklich ausläßt. Eine arithmetische Kennzeichnung dieser Ausnahmewerte steht noch aus.

1. Zuerst wird der Zusammenhang zwischen $T(m, n)$ und $D(m, n)$ hergestellt. Wenn $f(m, n)$ eine beliebige in m und n symmetrische ganzwertige Funktion ist, so läßt sich bekanntlich $t(m, n)$ aus den Bedingungen

$$t(m, n) + t(n, m) = f(m, n), \qquad m > 0,\ n > 0, \tag{5a}$$

$$t(m', n) = t(m, n), \qquad m' \equiv m \bmod n \tag{5b}$$

mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinschaftlichen Teilers

$$(m, n) = r$$

ermitteln. Wird nämlich für $n > m$

$$n = r_0, \qquad m = r_1$$

gesetzt und für $h = 0, 1, \ldots, L-1$

$$r_h = q_{h+1} r_{h+1} + r_{h+2}, \qquad 0 < r_{h+2} < r_{h+1} \tag{6}$$

mit ganzzahligen q_{h+1} gebildet, wobei

$$r_L = r, \qquad r_{L+1} = 0 \tag{7}$$

ist, so folgt aus (6) wegen (5b)

$$t(r_h, r_{h+1}) = t(r_{h+2}, r_{h+1}). \tag{8}$$

Durch Summation der sich aus (5) und (8) ergebenden Gleichungen

$$-(-1)^{h+1} t(r_{h+2}, r_{h+1}) + (-1)^h t(r_{h+1}, r_h) = (-1)^h f(r_h, r_{h+1}),$$
$$h = 0, 1, \ldots, L-1,$$

entsteht

$$t(m, n) = \sum_{h=0}^{L-1} (-1)^h f(r_h, r_{h+1}) + \tfrac{1}{2}(-1)^L f(r, r), \tag{9}$$

da aus (5a) und (5b)

$$t(0, r) = t(r, r) = \tfrac{1}{2} f(r, r)$$

zu entnehmen ist. Da (5) mit (4) zusammenfällt, wenn

$$f(m, n) = \left[\frac{m}{n}\right] + \left[\frac{n}{m}\right] - 2$$

st, wird nach (9)

10) $$T(m,n)=\sum_{h=1}^{L}(-1)^{h-1}q_h-1+(-1)^L,\qquad m<n.$$

Aus (4) ergibt sich sofort

11) $$T(m,n)=T\left(\frac{m}{r},\frac{n}{r}\right),\qquad r=(m,n),$$

12) $$\begin{cases} T(m,1)=0, & m\geqq 1\\ T(1,n)=n-2+\left[\frac{1}{n}\right], & n\geqq 1. \end{cases}$$

Geht man von (5) durch Einführung der ganzwertigen Funktionen

$$d(m,n)=n\,t(m,n),\qquad g(m,n)=m\,n\,f(m,n)$$

zu den Bedingungsgleichungen für $d(m,n)$

13a) $$m\,d(m,n)+n\,d(n,m)=g(m,n),$$

13b) $$d(m',n)=d(m,n),\qquad m'\equiv m \bmod n$$

über, so liefert (9) die Auflösung

14) $$d(m,n)=n\sum_{h=0}^{L-1}(-1)^h\frac{g(r_h,r_{h-1})}{r_h r_{h+1}}+(-1)^L\frac{g(r,r)}{2r^2}\,n,\qquad r=(m,n).$$

Der gegebene Rechenprozeß zeigt, daß $t(m,n)$ und $d(m,n)$ für alle natürlichen m, n eindeutig bestimmt sind. Ist $g(m,n)$ ein Polynom in m und n vom Grade G mit rationalen Koeffizienten

15) $$g(m,n)=\sum_{0\leqq k+l\leqq G}c_{kl}(m^k n^l+n^k m^l),\qquad k\geqq 0,\ l\geqq 0,$$

so kann man die Lösung von (13) zurückführen auf die Lösung von

16a) $$m\,d_{kl}(m,n)+n\,d_{kl}(n,m)=m^k n^l+n^k m^l,\qquad k\geqq l,$$

16b) $$d_{kl}(m',n)=d_{kl}(m,n),\qquad m'\equiv m \bmod n;$$

denn es gilt offenbar

17) $$d(m,n)=\sum_{0\leqq k+l\leqq G}c_{kl}d_{kl}(m,n),\qquad k\geqq 0,\ l\geqq 0.$$

Im folgenden werden nur einfache Spezialfälle von (16) betrachtet. Es ergibt sich[2]) aus (3) und (17)

18) $$D(m,n)=d_{20}(m,n)+\tfrac{1}{2}d_{00}(m,n)-\tfrac{3}{2}d_{11}(m,n).$$

Ohne Rechnung entnimmt man (16)

$$d_{k1}(m,n)=n^k,$$

[2]) Entsprechende Zerlegungen sind nach (15) auch für die den Apostolschen Summen zugeordneten $d(m,n)$ möglich.

insbesondere

(19) $$d_{11}(m,n)=n.$$

Werden $m\geqq 1$ und $n>1$ teilerfremd vorausgesetzt, so gibt es eine kleinst positive Lösung $1\leqq\overline{m}<n$ der Kongruenz

$$m\overline{m}\equiv 1 \bmod n, \qquad m\geqq 1,\ n>1,\ (m,n)=1,$$

und es folgt

(20) $$d_{00}(m,n)=2\overline{m}-n, \qquad (m,n)=1.$$

Denn wegen der Voraussetzung $(m,n)=1$ gibt es unendlich viele ganzzahlig Wertepaare x, y, die

(21) $$mx+ny=1$$

erfüllen. Zu der Lösung $x=\overline{m}$ dieser Gleichung gehört $y=\overline{n}-m$, wenn die kleinste positive Lösung von $n\overline{n}\equiv 1 \bmod m$ bezeichnet $(1\leqq\overline{n}<m)$. Di aus (21) entstehende Beziehung $m\overline{m}+n\overline{n}-mn=1$ rechnet sich nun i $md_{00}(m,n)+nd_{00}(m,n)=2$ um, was (20) beweist. Schließlich kann ma $d_{20}(m,n)$ in (18) durch $T(m,n)$ ausdrücken. Wird in (13) $g(m,n)=m^2+n$ gesetzt und beachtet man

$$\frac{r_h^2+r_{h+1}^2}{r_h r_{h+1}}=\frac{r_h}{r_{h+1}}+\frac{r_{h+1}}{r_h}=q_{h+1}+\frac{r_{h+1}}{r_h}+\frac{r_{h+2}}{r_{h+1}},$$

so folgt aus (14)

$$d_{20}(m,n)=m+n\left[\sum_{h=1}^{L}(-1)^{h-1}q_h+(-1)^L\right]$$

oder wegen (10)

(22) $$d_{20}(m,n)=m+n+nT(m,n).$$

Wegen (22), (20) und (19) ist

(23) $$D(m,n)=m+\overline{m}-n+nT(m,n), \qquad m\geqq 1,\ n\geqq 1,\ (m,n)=1.$$

Im allgemeineren Falle, in dem

$$g(m,n)=a_1(m^2+n^2)+a_2mn+a_3(m+n)+a_4$$

ein beliebiges quadratisches in m und n symmetrisches Polynom bezeichnet läßt sich die Lösung von (13) unter Beachtung von (15), (22), (19), (20) und

$$d_{10}(m,n)=1$$

ebenfalls auf $T(m,n)$ zurückführen:

$$d^*(m,n)=a_1m+a_4\overline{m}+a_3+n\left[a_1+\frac{a_2-a_4}{2}+a_1T(m,n)\right].$$

Liegt in (13) der Spezialfall

(24) $$mI(m,n)+nI(n,m)=\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}(m+n-1), \qquad m\equiv n\equiv 1 \bmod 2$$

vor, so gelingt auch hier auf Grund von (15) eine Reduktion der Lösung $I(m,n)$ auf $D(m,n)$. Man erhält

$$I(m,n) = \tfrac{1}{4}\left[d_{21}(m,n) + 2d_{10}(m,n) - \tfrac{3}{2}d_{11}(m,n) - d_{20}(m,n) - \tfrac{1}{2}d_{00}(m,n)\right],$$

woraus

$$I(m,n) = \tfrac{1}{4}\left[n^2 - 3n + 2 - D(m,n)\right], \qquad (m,n) = 1 \tag{25}$$

folgt. Aus (24) entnimmt man $I(1,n) = 0$ für $n \geqq 1$, so daß

$$D(1,n) = n^2 - 3n + 2 \tag{26}$$

entsteht, was man auch aus (3) direkt erhält. (25) schreibt sich dadurch

$$I(m,n) = \tfrac{1}{4}\left[D(1,n) - D(m,n)\right], \qquad (m,n) = 1. \tag{27}$$

$I(m,n)$ bedeutet bekanntlich die Inversionenzahl[3]).

2. Es ist nötig, $T(m,n)$ für negative m zu bestimmen.

$$T(-m,n) = -T(m,n), \qquad n \geqq 1. \tag{28}$$

Wegen (4b) ist $T(n-m,n) = -T(m,n)$ zu beweisen. Aus (4a) ergibt sich für $m < n$

$$T(n-m,n) + T(n,n-m) = \left[\frac{n}{n-m}\right] - 2, \tag{29a}$$

$$T(n-m,m) + T(m,n-m) = \left[\frac{m}{n-m}\right] + \left[\frac{n-m}{m}\right] - 2, \tag{29b}$$

woraus wegen $T(n,n-m) = T(m,n-m)$ nach Subtraktion der Gln. (29)

$$\begin{aligned} T(-m,n) - T(n,m) &= \left[\frac{n}{n-m}\right] - \left[\frac{m}{n-m}\right] - \left[\frac{n-m}{m}\right] = 2 - \left[\frac{n}{m}\right] \\ &= -T(m,n) - T(n,m) \end{aligned}$$

folgt, also (28).

Aus dem Euklidischen Algorithmus erhält man

$$T(\overline{m},n) = T(m,n), \qquad (m,n) = 1. \tag{30}$$

Definiert man nämlich zu (6) die Zahlen

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1, & \alpha_1 = q_1, & \alpha_h = q_h\alpha_{h-1} + \alpha_{h-2}, & h \geqq 2, \\ \beta_0 = 1, & \beta_1 = q_2, & \beta_h = q_{h+1}\beta_{h-1} + \beta_{h-2}, & h \geqq 2, \end{cases} \tag{31}$$

so liefern die Beziehungen (6)

$$\begin{aligned} r_0 &= \alpha_h r_h + \alpha_{h-1} r_{h-1}, \qquad h \geqq 1, \\ r_h &= (-1)^{h-1}(\alpha_{h-1} r_1 - \beta_{h-2} r_0), \qquad h \geqq 2, \end{aligned}$$

[3]) Vgl. [3] S. 163 (5.6).

insbesondere für $h=L$ wegen (7) und $r=1$

$$n=\alpha_L, \tag{32}$$

$$(-1)^{L-1}\alpha_{L-1}m\equiv 1 \bmod n. \tag{33}$$

Aus (33) folgt

$$\overline{m}=(-1)^{L-1}\alpha_{L-1}+\frac{1+(-1)^L}{2}n. \tag{34}$$

Wegen (4) und (31) wird

$$T(\alpha_{h-1},\alpha_h)+T(\alpha_{h-2},\alpha_{h-1})=q_h-2+\begin{cases}\left[\frac{1}{q_1}\right], & h=2,\\ 0, & h\geqq 3.\end{cases}$$

Nach Multiplikation dieser Gleichung mit $(-1)^{h-1}$ und Summation über h entsteht wegen (28), (32), (34), (10) und (12)

$$T(\overline{m},n)-T(1,q_1)=1+(-1)^L-\left[\frac{1}{q_1}\right]+\sum_{h=2}^{L}(-1)^{h-1}q_h=T(m,n)-T(1,q_1),$$

also (30). Von einer Verwendung von $T(m,n)$ für $n\leqq 0$ wird abgesehen.

3. $T(m,n)$ nimmt alle ganzzahligen Werte an, wie (12), (28) und (37) zeigen. Unmittelbar aus der Definition (4) folgen die Beziehungen für jedes ganze $x\geqq 1$

$$\begin{cases}T(m,mx+n)=x-\left[\frac{m}{n}\right]+T(m,n)\\ \qquad\qquad =x-2+\left[\frac{n}{m}\right]-T(n,m), \quad m\geqq 1,\ n\geqq 1.\end{cases} \tag{35}$$

Für $x>3$ ist

$$T(m,mx-n)=x-3+T(n,m), \quad m>n.$$

Aus (35) sind die Spezialfälle

$$T(m,mx+1)=x-m, \quad T(m,m^2+1)=0, \tag{36}$$

$$\begin{cases}T(m,m^2\pm am+1)=\pm a\\ T(nx+m,\ nx^2+mx+n)=T(m,n), \quad n>m,\ x\geqq 0\end{cases} \tag{37}$$

zu gewinnen. Die letzte Gleichung ist bemerkenswert, da sie eine Transformation der Argumente von $T(m,n)$ angibt, bei der $T(m,n)$ ungeändert bleibt.

SATZ 1. *Sind die vier natürlichen Zahlen a, b, m, n durch*

$$an-bm=\pm(m,n) \tag{38}$$

verknüpft, so gilt für jedes ganze $x\geqq 1$

$$T(mx+a,nx+b)=\pm(m,n)x\mp\left[\frac{n}{(m,n)b}\right]+T(a,b), \tag{39a}$$

$$=\mp(m,n)x\pm\left[\frac{(m,n)b}{n}\right]+T(m,n). \tag{39b}$$

Der Beweis braucht nur für $(m, n) = 1$ geführt zu werden[4]). Ist $(m, n) > 1$, so ersetze man m durch $\frac{m}{(m, n)}$, n durch $\frac{n}{(m, n)}$ und x durch $(m, n)\, x$. Nun wird (39a) für $x = 1$ gezeigt:

$$T(m + a, n + b) = \pm 1 \mp \left[\frac{n}{b}\right] + T(a, b), \qquad (m, n) = 1. \tag{40}$$

Da wegen (38) für $(m, n) = 1$

$$a n - b m = \pm 1, \qquad (m + a) n - (n + b) m = \pm 1$$

gilt, also

$$a n \equiv \pm 1 \bmod b, \quad (m + a) n \equiv \pm 1 \bmod (n + b), \quad b m \equiv \mp 1 \bmod n \tag{41}$$

ist, folgt aus (30)

$$T(n, b) = \pm T(a, b), \tag{42}$$

$$T(n, n + b) = \pm T(m + a, n + b), \tag{43}$$

$$T(b, n) = \mp T(m, n). \tag{44}$$

Nach (4) ist nun

$$T(n, n + b) + T(b, n) = \left[\frac{n + b}{n}\right] - 2, \tag{45}$$

$$T(n, b) + T(b, n) = \left[\frac{b}{n}\right] + \left[\frac{n}{b}\right] - 2. \tag{46}$$

Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt die Behauptung (40), nachdem man (42) und (43) eingesetzt hat. Durch Induktionsschluß nach x entsteht (39a) aus (40); denn, wenn (39a) für $(m, n) = 1$ gilt, wird wegen (41b) und (39a)

$$T\big(m(x + 1) + a, n(x + 1) + b\big) = T\big(m x + (m + a), n x + (n + b)\big)$$

$$= \pm x \mp \left[\frac{n}{n + b}\right] + T(m + a, n + b) = \pm (x + 1) \mp \left[\frac{n}{b}\right] + T(a, b).$$

Setzt man (42) und (44) in (46) ein, so wird

$$T(a, b) = T(m, n) \pm \left[\frac{b}{n}\right] \pm \left[\frac{n}{b}\right] \mp 2.$$

Vermöge dieser Beziehung hängen (39a) und (39b) zusammen.

Satz 2. $T(a m x \pm 1, m^2 x) = \pm [(a, m)^2 x - 3], \qquad m \geqq 2, \; x \geqq 1.$

$$T(a m x \pm 1, m^2 x) = \pm \left\{x - 2 + \left[\frac{1}{x}\right]\right\}, \qquad m = 1, \; x \geqq 1. \tag{47}$$

Die oberen und unteren Vorzeichen gehören jeweils zusammen.

---

[4]) Die Beweismethode ist die von H. Rademacher [4, Satz 4] angewendete.

(47) folgt sofort aus (4b) und (12). Der Beweis von Satz 2 wird für $(a, m) = 1$ geführt. Ist $(a, m) > 1$, so ersetze man a durch $\frac{a}{(a, m)}$, m durch $\frac{m}{(a, m)}$ und x durch $(a, m)^2 x$. Man erhält

$$T(a m x + 1, m^2 x) = x - 3, \qquad (a, m) = 1,\ m \geqq 2,\ x \geqq 1. \tag{48}$$

Das untere Zeichen im Satz 2 ergibt sich, wenn man dort a durch $m - a$ ersetzt und dann (28) und (5b) verwendet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a < m$. Ist nämlich $a = q m + a_0$, $q > 1$, $m > a_0 > 1$, so ist

$$T(a m x + 1, m^2 x) = T(a_0 m x + 1 + q m^2 x, m^2 x) = T(a_0 m x + 1, m^2 x).$$

Man definiere nun die r_h nach (6) mit $r_0 = m$, $r_1 = a \neq 1$, weiter $\alpha_{-1} = 0$ und für $h \geqq 0$ die α_h nach (31). Dann ist (7), (32) und (34) zu beachten:

$$r_L = 1, \quad r_{L+1} = 0, \quad \alpha_L = m, \quad (-1)^{L-1} \alpha_{L-1} = \bar{a} - \frac{1 + (-1)^L}{2} m.$$

Zur Abkürzung bezeichne für $1 \leqq h \leqq L$

$$T_h = T(m r_h x + (-1)^{h-1} \alpha_{h-1}, \quad m r_{h-1} x + (-1)^{h-2} \alpha_{h-2})$$
$$T_h' = T(m r_{h-1} x + (-1)^{h-2} \alpha_{h-2}, \quad m r_h x + (-1)^{h-1} \alpha_{h-1}).$$

Dann ergibt sich aus (4) nach leichter Rechnung

$$T_h + T_h' = q_h - 2 + \begin{cases} 0 & 1 \leqq h \leqq L - 1 \\ -\frac{1 + (-1)^{L-1}}{2} & h = L. \end{cases} \tag{49}$$

T_h' bleibt wegen (4b) ungeändert, wenn das q_h-fache zweite Argument vom ersten abgezogen wird. Es entsteht wegen (6) und (31) für $h \geqq 1$

$$T_h' = T\big(m(r_{h-1} - q_h r_h) x + (-1)^h (\alpha_{h-2} + q_h \alpha_{h-1}),\ m r_h x + (-1)^{h-1} \alpha_{h-1}\big) = T_{h+1}.$$

Aus (49) folgt nun wegen (10)

$$T_1 - (-1)^L T_{L+1} = T(a, m) - \frac{1 + (-1)^{L-1}}{2}. \tag{50}$$

Hierin ist T_1 die auszuwertende Summe (48) und unter Berücksichtigung von (35)

$$(-1)^L T_{L+1} = T\Big(m, m x + \bar{a} - \frac{1 + (-1)^L}{2} m\Big) = x - 2 - \frac{1 + (-1)^L}{2} - T(\bar{a}, m).$$

Aus (50) folgt nun wegen (30) die Behauptung (48). Der ausgeschlossene Fall $a = 1$ erledigt sich durch

$$T(m x + 1, m^2 x) = m - 3 - T(m^2 x, m x + 1) = m - 3 + T(m, m x + 1)$$
$$= m - 3 + (x - m) = x - 3,$$

wobei (4) und (36) verwendet wurden.

Satz 2 ist äquivalent

Satz 2a. *Wenn für* $n>1$, $n\,|\,(m\pm 1)^2$ *ist, gilt*

$$T(m,n)=\pm\left(3-|\mu(n)|-\frac{(n,m\pm 1)^2}{n}\right),\qquad m\geqq 2, \tag{51}$$

wobei $\mu(n)$ *die Möbiussche Funktion bezeichnet, mit dem Zusatze, daß für* $n\,|\,m\pm 1$ *in* (51) *stets* $|\mu(n)|=1$ *zu setzen ist.*

Satz 3. *Für* $m\geqq 2$, $n\geqq 2$ *und* $(m,n)=(m-1,n)=1$ *gilt:*

$$T(m,n)+T(1-m,n)+T(1-\overline{m},n)=-3. \tag{52}$$

Die Beziehung nimmt für $(m,n)=(m+1,n)=1$, $m\geqq 1$, $n\geqq 2$ die Gestalt an

$$T(m,n)-T(m+1,n)-T(\overline{m}+1,n)=3. \tag{52a}$$

Zum Beweise führe man die Abkürzungen

$$\gamma_h=\alpha_h+(-1)^{h-1}r_{h+1},\qquad \varepsilon_h=\operatorname{sign}\gamma_h,\qquad -1\leqq h\leqq L$$

mit den aus dem Euklidischen Algorithmus für $(m,n)=1$ stammenden Bezeichnungen (6) und (31) ein. Da $(m-1,n)=1$ ist, sind alle $\gamma_h\neq 0$ und daher die Größen

$$v_h=\left[\frac{\varepsilon_h\gamma_h}{\varepsilon_{h+1}\gamma_{h+1}}\right],\qquad w_h=\left[\frac{\varepsilon_{h+1}\gamma_{h+1}}{\varepsilon_h\gamma_h}\right] \tag{53}$$

sinnvoll. Es genügen dann nach (4a) und (28)

$$U_h=T(\gamma_h,\varepsilon_{h+1}\gamma_{h+1})$$
$$U_h'=T(\gamma_{h+1},\varepsilon_h\gamma_h)$$

der Gleichung

$$\varepsilon_hU_h+\varepsilon_{h+1}U_h'=v_h+w_h-2,\qquad 0\leqq h\leqq L-1. \tag{54}$$

Aus

$$\begin{aligned}\gamma_{h+1}-q_{h+1}\gamma_h&=(\alpha_{h+1}-q_{h+1}\alpha_h)+(-1)^h(r_{h+2}+q_{h+1}r_{h+1})\\&=\alpha_{h-1}+(-1)^hr_h=\gamma_{h-1}\end{aligned}$$

folgt wegen (4b)

$$U_h'=T(\gamma_{h+1}-q_{h+1}\varepsilon_h(\varepsilon_h\gamma_h),\varepsilon_h\gamma_h)=T(\gamma_{h-1},\varepsilon_h\gamma_h)=U_{h-1}.$$

Es ist identisch

$$\sum_{h=0}^{L-1}(-1)^h\varepsilon_{2\left[\frac{h+1}{2}\right]}(\varepsilon_hU_h+\varepsilon_{h+1}U_{h-1})=(-1)^{L-1}U_{L-1}-U_{-1}, \tag{55}$$

wenn man beachtet, daß $\varepsilon_h=+1$ für ungerade h und $\varepsilon_0=-1$, $\varepsilon_{L-1}=\varepsilon_L=1$ ist. Andererseits läßt sich

$$\begin{aligned}&\sum_{h=0}^{L-1}(-1)^h\varepsilon_{2\left[\frac{h+1}{2}\right]}(v_h+w_h-2)=3+(-1)^L-v_{-1}+\\&\qquad+\sum_{0\leqq h\leqq\frac{L-1}{2}}\varepsilon_{2h}(w_{2h}-v_{2h-1})-\sum_{0\leqq h\leqq\frac{L-2}{2}}(\varepsilon_{2h+2}w_{2h+1}-\varepsilon_{2h}v_{2h})\\&=4+(-1)^L-v_{-1}+\sum_{h=1}^{L}(-1)^{h-1}q_h\end{aligned} \tag{56}$$

schreiben, wenn man $w_{-1}=v_{L-1}=0$ berücksichtigt und die Bedeutung der v_h, w_h in (53) heranzieht. Man braucht nun

$$\gamma_L=\gamma_{-1}=n, \quad \gamma_0=1-m, \quad \gamma_{L-1}=(-1)^L-(-1)^L\overline{m}+(-1)^L\frac{1+(-1)^L}{2}n,$$

und erhält

$$U_{-1}=T(n, m-1), \tag{57}$$

$$(-1)^L U_{L-1}=T(1-\overline{m}, n). \tag{58}$$

Ferner ist nach (4)

$$U_{-1}-T(1-m, n)=v_{-1}-2. \tag{59}$$

Da nach (54) die linken Seiten von (55) und (56) übereinstimmen, gilt die Gleichung

$$(-1)^{L-1}U_{L-1}-U_{-1}=5-v_{-1}+T(m, n). \tag{60}$$

Es wurde dabei (10) eingesetzt. Nach (57), (58) und (59) entsteht aus (60) Satz 3.

SATZ 4. *Wenn $n>1$ ein Teiler von m^2+am+1 ist, gilt für $a=0, \pm 1, \pm 3$*

$$T(m, n)=a. \tag{61}$$

Für $n=m^2+am+1$ ist wegen (37) nichts mehr zu beweisen. Wegen $m^2+am\equiv -1 \bmod n$ und (30) wird $T(m, n)=-T(m+a, n)$. Hieraus folgt für $a=0$ sofort $T(m, n)=0$. Ist $a=-1$, so läßt sich $m^2-m\equiv -1$ in der Gestalt $m(1-m)\equiv 1$ und $m\equiv 1-\overline{m}$ schreiben, so daß sich $T(m, n)=T(1-m, n)=T(1-\overline{m}, n)$ und nach Satz 3 $T(m, n)=-1$ ergibt. Wenn $a=-3$ ist, also $(1-m)(1-\overline{m})\equiv -1$, so wird $T(1-m, n)=-T(1-\overline{m}, n)$ und nach Satz 3 $T(m, n)=-3$. Die Fälle $a=+1, +3$ folgen entsprechend aus (52a).

SATZ 5. *Für $n\geqq 2$ und ganzes m ist*

$$-n+2\leqq T(m, n)\leqq n-2. \tag{62}$$

Ist $1<m<n$ und $(m, n)=1$, so gilt

$$\left[\frac{n}{m}\right]-m\leqq T(m, n)\leqq\left[\frac{n}{m}\right]+m-4, \tag{63}$$

so daß also für $1<m<\sqrt{n}$

$$T(m, n)>0 \tag{64}$$

wird.

Nach (12) und (28) ist (62) für $m=\pm 1$ richtig. Summiert man die Gln. (6), so entsteht

$$\sum_{h=2}^{L} q_h r_h=m+r_2-r\leqq 2m-2, \qquad m<n,$$

und aus (10) folgt

$$|T(m, n)|\leqq q_1-1+\sum_{h=2}^{L}q_h+1\leqq q_1+\sum_{h=2}^{L}q_h r_h\leqq\left[\frac{n}{m}\right]+2m-2, \qquad m<n.$$

Wenn $3 \leqq m \leqq \frac{n}{2} - 1$ ist, wird

$$\left[\frac{n}{m}\right] + 2m - 2 \leqq n - 2.$$

Es gilt nun

(62a) $$|T(m, n)| \leqq n - 2, \quad 1 \leqq m \leqq \frac{n}{2}$$

auch für $m = 2, \frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}$; denn es ist nach (4) und (30)

$$T\left(\frac{n-1}{2}, n\right) = -T(2, n) = -\frac{n-5}{2}, \quad n \equiv 1 \bmod 2$$

und nach (11)

$$T\left(\frac{n}{2}, n\right) = 0, \quad n \equiv 0 \bmod 2.$$

Wegen $|T(n-m, n)| = |T(m, n)|$ und (4b) ist (62a) für alle positiven und auf Grund von (28) für alle negativen m bewiesen. (63) folgt nun sofort aus (4a):

$$T(m, n) = \left[\frac{n}{m}\right] - 2 - T(n, m)$$

nach Einsetzen der Ungleichung (62)

$$-m + 2 \leqq T(n, m) \leqq m - 2,$$

so daß, wie behauptet

$$\left[\frac{n}{m}\right] - 2 - m + 2 \geqq T(m, n) \geqq \left[\frac{n}{m}\right] - 2 + m - 2$$

entsteht.

4. Die für $T(m, n)$ gültigen Formeln und Sätze lassen sich für die Herleitung von Eigenschaften von $D(m, n)$ verwenden. Aus (30) geht sofort wegen (23)

$$D(\overline{m}, n) = D(m, n), \quad (m, n) = 1, \ n \geqq 1$$

hervor. Weiter ergibt sich entsprechend (28)

$$D(-m, n) = -D(m, n), \quad (m, n) = 1, \ n \geqq 1,$$

wenn man zum Beweise die Gln. (29) durch aus (3) entnommene Beziehungen ersetzt. Die leicht aus (3) zu beweisende der Gl. (11) entsprechende Reduktionsformel

$$D(m, n) = r\, D\left(\frac{m}{r}, \frac{n}{r}\right) + D(r, r)\, d_{00}\left(\frac{m}{r}, \frac{n}{r}\right), \quad (m, n) = r$$

mit $D(r, r) = \frac{1 - r^2}{2r}$ soll im folgenden nicht verwendet werden, da künftig stets $(m, n) = 1$ vorausgesetzt werden soll. Überdies sei immer $n \geqq 1$.

Es werden nun aus einem gegebenen Wertepaar m, n unendlich viele Wertepaare m^*, n^* hergeleitet, so daß

$$D(m^*, n^*) = D(m, n)$$

wird. Natürlich ist die Forderung nach (3b) durch $m^* \equiv m \bmod n$ und $n^* = n$ zu erfüllen. Darüber hinaus gilt

SATZ 6. *Für jedes ganzzahlige* $x \geqq 0$ *gilt*

$$D\left(n\,x+m,\ \frac{(n\,x+m)^2 - D(m,n)\,(n\,x+m)+1}{n}\right) = D(m,n),$$

wenn $(m,n)=1$ *ist.*

Zunächst wird

$$D\big(m, D(n,m)+3m-n\big) = D(m,n), \qquad (m,n)=1 \tag{65}$$

bewiesen. Es ist wegen (3b), (23) und (30)

$$D[D(n,m)+3m-n,\,m] = D(\bar{n},m) = D(n,m). \tag{66}$$

Wird für die linke Seite von (65) kurz D geschrieben, so ergibt (3a) unter Berücksichtigung von (66)

$$\begin{aligned} m\,D + [D(n,m)+3m-n]\,D(n,m) \\ = m^2 + [D(n,m)+3m-n]^2 + 1 - 3m[D(n,m)+3m-n]. \end{aligned}$$

Nach Umformung entsteht hieraus

$$m\,D + n\,D(n,m) = m^2 + n^2 + 1 - 3mn,$$

im Vergleich mit (3a) $D = D(m,n)$, also (65). Wegen (3) kann man (66) auch

$$D\left(m,\ \frac{m^2 - m\,D(m,n)+1}{n}\right) = D(m,n)$$

schreiben. Ersetzt man hierin m durch $n\,x+m$, so bleibt $D(m,n)$ ungeändert, und es entsteht Satz 6. Aus ihm sind viele Spezialfälle zu entnehmen. Ist $D(m,n)=0$, so wird $D\left(m,\ \frac{m^2+1}{n}\right)=0$, d.h. es ist $n \mid m^2+1$. Aus $T(m,n)=0$ folgt dagegen nicht notwendig $n \mid m^2+1$. Nach (48) ist nämlich für $x=3$

$$T(3am \pm 1,\ 3m^2) = 0, \qquad (a,m)=1,\ m \geqq 2.$$

Es gilt die Umkehrung. Aus $n \mid m^2+1$, nämlich $\bar{m} = n-m$, folgt damit wegen (23) und Satz 4 $D(m,n) = T(m,n) = 0$. Satz 6 liefert aus $D(1,3)=2$

$$D(3x \pm 1,\ 3x^2) = \pm 2.$$

Damit $|D(m,n)| = 2$ ist, muß übrigens n die Form $3x^2$ haben. Allgemeiner folgt, wenn

$$D(m,n) = 2m \tag{67}$$

ist, aus Satz 6

$$D\left(n\,x+m,\ n\,x^2 - \frac{m^2-1}{n}\right) = 2m. \tag{68}$$

Die Voraussetzung (67) kann man z.B. für jedes $k \geqq 1$ erfüllen mit

$$m = k(2k+1), \qquad n = (k+1)(2k^2+k+1).$$

Dadurch geht (68) über in

$$D\big((k+1)(2k^2+k+1)\,x+k(2k+1),\ (k+1)(2k^2+k+1)\,x^2-(2k-1)\big) = 2k(2k+1).$$

Für $k=1$ erhält man

$$D(8x\pm 3,\ 8x^2-1)=\pm 6.$$

Wegen $D(1,4)=6$ ist ferner nach Satz 6

$$D(4x\pm 1,\ 4x^2\mp 4x-1)=\pm 6,\qquad x\geqq 2.$$

, 2, 6 sind die absolut kleinsten Werte von $D(m,n)$. Bezeichnet

$$u_1=1,\ u_2=2,\ u_{\nu+2}=u_\nu+u_{\nu+1},\qquad \nu=1,2,3,\ldots$$

ine Fibonnaccische Folge, so gilt bei gegebenem ganzen $a\geqq 0$

$$D(m,n)=a(a+1)\,m,$$

enn $m=u_{2\nu-1}$, $n=u_{2\nu+1}+(a-1)\,u_{2\nu-1}$ genommen wird. Für $a=1$ gilt (67) nd daher (68):

$$D(u_{2\nu+1}x+u_{2\nu-1},\ u_{2\nu+1}x^2-u_{2\nu-3})=2u_{2\nu-1},\qquad x\geqq 1,\ \nu\geqq 1.$$

5. Es ist leicht, die Sätze 1 bis 5 auf $D(m,n)$ zu übertragen. Anstelle der inearformen in x bei der T-Funktion sind nunmehr quadratische Formen n x bei der D-Funktion getreten[5]).

Satz 1′. *Unter der Voraussetzung* (38) *gilt für jedes ganze* $x\geqq 1$

$$D(mx+a,\ nx+b)=\pm n(m,n)\,x^2+\\ +\left[(m,n)\,D\left(\frac{m}{(m,n)},\frac{n}{(m,n)}\right)\pm 2b(m,n)-3n\right]x+D(a,b).$$

Satz 2′. $D(amx\pm 1,\ m^2x)=\pm[m^2x((a,m)^2x-3)+2]$.

Satz 2a′. *Für* $n>1$, $n\mid(m\pm 1)^2$ *ist*

$$D(m,n)=\mp[(n,m\pm 1)^2-3n+2].$$

Satz 3′. *Wenn* $(m,n)=(m-1,n)=1$ *ist, gilt für* $n\geqq 1$

$$D(m,n)+D(1-m,n)+D(1-\overline{m},n)=-3(n-1).$$

Satz 4′. *Wenn* $n>1$, $n\mid m^2+am+1$ *und* $a=0,\pm 1,\pm 3$ *ist, gilt für* $n\geqq 1$ $D(m,n)=a(n-1)$.

Satz 5′. *Für* $n\geqq 1$ *und* $(m,n)=1$ *ist*

$$-(n^2-3n+2)\leqq D(m,n)\leqq n^2-3n+2.$$

st $1<m<n$, $(m,n)=1$, *so gilt*

$$(n+1)\left[\frac{n}{m}\right]-(m+1)\,n+m\leqq D(m,n)\leqq n\left[\frac{n}{m}\right]+mn-3n-4.$$

[5]) Die Sätze 1′, 2′, 2a′ und 4′ entsprechen den Sätzen 5, 15 und 13 in [4], dort in nderem Aufbau. Satz 3′ steht in [5] mit anderem Beweis. Satz 5 verschärft Satz 2 in [4].

Die Beweise der Sätze 2′ bis 5′ sind aus den entsprechenden Sätzen 2 bis unter Verwendung von (23) zu erhalten. Satz 1′ ist wie Satz 1 zu beweisen nur daß man die Gln. (45) und (46) durch aus (3) folgende Beziehungen ersetzt Der folgende[6])

SATZ 7. $D(mx+1,\ m(m+a)x+a)$

$$= m(m+a)x^2+m(m+a)(a-3)x+(a-1)(a-2)$$

$$= (x+a-3)[m(m+a)x+a]-(ax-2) \qquad x \geqq 0$$

verschafft Einblick in den Wertevorrat der $D(m,n)$. Er ist leicht durch wiederholte Verwendung von (3) zu erhalten. Einige Spezialfälle führen zu

$$D(mx\pm 1,\ m^2x\mp x(x-3)m-(x-3)) = \pm D(1,x)$$

$$D(m, mx+1) = mx(x-m)$$

$$D(x, 2x^2+1) = 2x^3$$

$$D(2^k, 2^{2k+1}+1) = 2^{3k+1}.$$

Aus $D(m,n)=2^\alpha$ folgt übrigens $\alpha \equiv 1 \bmod 3$.

$$D(3x+2,\ 12x+5) = 12x^2.$$

Zum Zwecke der Übersicht über die Werte von $D(m,n)$ lassen sich weitere Satz 7 entsprechende Sätze aufstellen. Im Anschluß an Satz 4′ kann man fragen, ob es stets ganze Zahlen m, n gibt, für die

$$D(m,n) = a(n-n_0)+D(1,n_0)$$

gilt, wenn a und $n_0 \geqq 1$ beliebig ganzzahlig gegeben sind. Die Frage ist zu bejahen; denn

$$m = n_0x+1$$

$$n = n_0x^2+n_0(a+3-n_0)x+(a+3-n_0)$$

ist eine partikuläre Lösung.

6. Es ist darauf hinzuweisen, daß alle bekannten Kongruenzen für $D(m,n)$ nach den Moduln 2, 4, 6 und 8 aus der Voraussetzung (3) ohne Verwendung von (1) zu erhalten sind. Im folgenden wird gebraucht:

(69) Für $n \not\equiv 0 \bmod 3$, $(m,n)=1$ ist $D(m,n) \equiv 0 \bmod 6$,
für $m \equiv \pm 1 \bmod 3$, $n \equiv 0 \bmod 3$, $(m,n)=1$ ist

(70) $$D(m,n) \equiv \pm 2 \bmod 18.$$

Die oberen und unteren Vorzeichen gehören jeweils zusammen. Will man (70) beweisen, so stellt man zunächst wegen (69)

$$n\,D(n,m) \equiv 0 \bmod 18$$

[6]) Ihm entspricht die in x lineare Beziehung $T(mx+1,\ m(m+a)x+a) = x+a-$ $m \geqq 2,\ x \geqq 1$.

est. (3b) liefert dann

$$m\,D(m,n) = [(m \mp 1)^2 + n^2 - 3mn] \pm 2m$$

nd damit

$$m\,D(m,n) \equiv \pm 2m \bmod 18, \tag{71}$$

la die eckige Klammer $\equiv 0 \bmod 18$ ist, wie man leicht sieht. Für ungerade n folgt aus (71) sofort (70). Bei geradem m sind n und $m+3n$ ungerade. Man verwende dann $D(m,n) = D(m+3n, n)$.

Die Werte von $D(m,n)$ gehören also nach (69) und (70) den fünf Restklassen $0, \pm 2, \pm 6 \bmod 18$ an. In jeder dieser Klassen liegen unendlich viele Werte $D(m,n)$, wie etwa aus den quadratischen Formen

$$D_1 = D(x-1,\ 8x-9) = 8x^2 - 2, \qquad D_1 \equiv 0, -2, \pm 6 \bmod 18$$
$$D_2 = D(x+1,\ 4x+3) = 4x^2 + 2, \qquad D_2 \equiv 0, +2, \pm 6 \bmod 18$$

hervorgeht. Genauere Untersuchungen deuten darauf hin, daß es in diesen Klassen ganzzahlige Werte $w > 0$ gibt, für die $|D(m,n)| = w$ in m und n unlösbar ist, und zwar unterhalb 300

$w \equiv -2 \bmod 18$	34, 88, 214
$w \equiv 6$	24.

Eine zahlentheoretische Kennzeichnung der „Ausnahmewerte" w, die $D(m,n)$ nicht annimmt, steht noch aus. Bezeichnet $A(x)$ die Anzahl der Zahlen a mit $0 \leqq a \leqq x$, für die es Wertepaare m, n mit $|D(m,n)| = a$ gibt, so existiert ein von Null verschiedener Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x} = A.$$

Natürlich ist $A \leqq \frac{5}{18}$.

Literatur

[1] Dedekind, R.: Erläuterungen zu den Fragmenten XXVIII in: B. Riemann, Gesammelte Werke, S. 466–478; auch Dedekind's Gesammelte Werke **1**, 159–172 (1930). — [2] Rademacher, H.: Zur Theorie der Modulfunktionen. J. f. reine u. angewandte Math. **167**, 312–336 (1931). — [3] Meyer, C.: Über einige Anwendungen Dedekindscher Summen. J. f. reine u. angewandte Math. **198**, 143–203 (1957). — [4] Rademacher, H.: Zur Theorie der Dedekindschen Summen. Math. Z. **63**, 445–463 (1956). — [5] Dieter, U.: Beziehungen zwischen Dedekindschen Summen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **21**, 109–125 (1957).

Leipzig, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 3. November 1958)

Hopf, E.
Math. Zeitschr. 72, 76–81 (1959)

Zur Kennzeichnung der Euklidischen Norm

Leon Lichtenstein in memoriam

Von

Eberhard Hopf[1])

V sei ein reeller Vektorraum. Vektoren (Punkte) in V seien mit kleinen lateinischen, reelle Zahlen mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet. In V sei eine (Minkowskische) Norm $|x|$ gegeben: 1) $|0|=0$, sonst $|x|>0$; 2) $|\alpha x|=\alpha|x|$, $\alpha\geqq 0$, 3) $|x+y|\leqq|x|+|y|$. Symmetrie der Norm, $|-x|=|x|$, d.h. $|\alpha x|=|\alpha||x|$, ist nicht vorausgesetzt.

Orthogonalität, $x\perp y$, bedeutet bekanntlich, daß $|x-\alpha y|\geqq|x|$ für beliebiges α gilt. Trivialerweise gilt: $x\perp y\Rightarrow\beta x\perp\gamma y$, solange $\beta\geqq 0$ ist. Ist jedoch die Norm symmetrisch, so gilt diese Implikation für beliebiges β. Die geometrische Bedeutung von $x\perp y$, $|x|=1$, ist die, daß die durch den Endpunkt von x gehende Gerade der Richtung y eine Stützgerade der konvexen Einheitskugel $|z|\leqq 1$ ist.

Bekanntlich heißt eine Norm $|x|$ Euklidisch, wenn $|x|^2=(x,x)$ in V gilt, wobei (x,y) ein bilineares Skalarprodukt in V ist. Der im folgenden mitgeteilte Satz entsprang dem Bemühen des Verfassers, in seiner Vorlesung über normierte Vektorräume die Euklidizität mit Hilfe des Orthogonalitätsbegriffes möglichst einfach zu kennzeichnen, und zwar für alle Dimensionszahlen n einschließlich $n=2$. Für $n>2$ reicht für die Euklidizität nach einem schönen, von Blaschke vor mehr als vierzig Jahren gefundenen Satze bereits die Symmetrie der Orthogonalität, $x\perp y\Rightarrow y\perp x$, aus[2]). Diese Kennzeichnung der Euklidizität gilt jedoch nicht für $n=2$. Demgegenüber gilt der folgende Satz auch für $n=2$.

Satz. *Ist für alle orthogonalen Zweibeine x, y, $x\perp y$, in V die Länge $|x+y|$ eine eindeutige Funktion der beiden Längen $|x|$ und $|y|$, so ist die Norm Euklidisch*[3]).

Die Voraussetzung besagt im wesentlichen, daß für alle rechtwinkligen Dreiecke in V die Länge der Hypothenuse durch die Längen der Katheten eindeutig bestimmt ist. Jedoch kann diese Fassung verschieden verstanden werden. Man kann z.B. die rechtwinkligen Dreiecke als orientiert annehmen, d.h. als Tripel von Vektoren x, y, z mit den Eigenschaften $x\perp y$, $x+y+z=0$

[1]) The author is indebted to the Office of Naval Research for a research grant at Indiana University.

[2]) Blaschke, W.: Räumliche Variationsprobleme mit symmetrischer Transversalitätsbedingung. Sitzungsber. Sächs. Akad. d. Wiss. **68**, 50–55 (1916).

[3]) Ob die Schlußfolgerung richtig bleibt, wenn man sich in der Voraussetzung auf gleichschenklige Zweibeine, $|x|=|y|$, beschränkt, haben wir nicht untersucht.

nd unter Hypothenuse den Vektor z verstehen. Es kommen vier verschiedene Voraussetzungen in Frage: Für orthogonale Zweibeine x, y ist a) $|x+y|$,) $|x-y|$, c) $|y-x|$, d) $|-x-y|$ eine eindeutige Funktion von $|x|$ und $|y|$. Würde man von der Norm zusätzlich die Symmetrie, $|-z|=|z|$, voraussetzen, o wären zufolge der eingangs gemachten Bemerkung über Orthogonalität lle diese Voraussetzungen einander gleichwertig. Demnach kommt es darauf n, die Symmetrie der Norm aus der jeweiligen Voraussetzung zu erschließen. Unter jeder der Voraussetzungen b), c), d) ist das ganz einfach. Wendet man .B. c) oder d) auf den Fall $y=0$ an ($x \perp 0$, und auch $0 \perp z$, gilt immer), so olgt, daß $|-x|$ eine eindeutige Funktion von $|x|$ ist. Wegen der Homogenität ann also nur $|-x|=c|x|$ sein. Ersetzt man hier x durch $-x$, so folgt $c=1$. Damit ist der Satz unter Voraussetzung b), c) oder d) auf den Satz unter Voraussetzung a) zurückgeführt. Im folgenden wird der Satz unter Voraussetzung a) bewiesen. Jedoch sei erwähnt, daß unter jeder der anderen Voraussetzungen der Satz direkt und einfacher bewiesen werden kann. Wir überlassen es dem Leser, die Vereinfachungen herauszufinden.

Der obige Satz hat die Eigentümlichkeit, daß er nicht nur für $n=2$ gilt, ondern daß er auch eine Kennzeichnung der Euklidizität durch die Existenz „vieler" Isometrien von V in sich birgt. Eine Isometrie von V ist eine Abbildung $x'=Ux$ von V auf sich, die die Entfernung erhält, $|Uy-Ux|=|y-x|$. Jede Isometrie U mit $U0=0$ läßt die Norm ungeändert, $|Ux|=|x|$. Daß Orthogonalität unter einer solchen Isometrie erhalten bleibt, folgt unter Benützung des Satzes von Mazur und Ulam, nach welchem eine solche Isometrie in einem normierten reellen Vektorraum linear ist[4]), $U(x+y)=Ux+Uy$, $U(\alpha x)=\alpha U(x)$,

$$|Ux-\alpha Uy|=|Ux-U(\alpha y)|=|x-\alpha y|\geqq|x|=|Ux|.$$

Eine den Nullpunkt festlassende Isometrie führt also jedes orthogonale Zweibein x, y in ein ebensolches, x', y', über und es ist

$$|x'|=|x|, \quad |y'|=|y|. \tag{1}$$

Auf der anderen Seite gilt nun der Satz: Gibt es zu jedem Paar von orthogonalen Zweibeinen x, y und x', y' mit der Eigenschaft (1) eine Isometrie in V, welche x in x', y in y' überführt, so ist die Norm Euklidisch. Zwar ist dies nicht die einfachste unter allen Kennzeichnungen dieser Art, aber der Verfasser führt sie in seiner Vorlesung an, weil sie eine unmittelbare Folge unseres obigen Satzes ist. In der Tat folgt aus der Voraussetzung, daß für jedes Paar orthogonaler Zweibeine x, y und x', y' mit der Eigenschaft (1) auch $|y'-x'|=|Uy-Ux|=|y-x|$ ist, d.h., daß die Voraussetzung c) erfüllt ist. Der Satz bleibt richtig, wenn man sich in der Voraussetzung auf Zweibeine der Schenkellänge Eins beschränkt. Beim Beweise muß man aber dann den Satz von Mazur und Ulam benutzen.

[4]) Banach, S.: Théorie des opérations linéaires, Chap. XI, § 3. Der Beweis wird dort unter Voraussetzung der Symmetrie der Norm geführt. Er kann aber ohne Schwierigkeit auf den allgemeinen Fall ausgedehnt werden.

In einem komplexen Vektorraum V wird Orthogonalität durch das B stehen derselben Ungleichung $|x-\alpha y|\geqq y$ für alle komplexen α definiert. D obige Satz läßt sich auch im komplexen Falle beweisen; jedoch ist dem Ve fasser der Beweis nur unter der zusätzlichen Voraussetzung gelungen, daß d Norm symmetrisch ist, $|\varepsilon x|\equiv|x|$ für $|\varepsilon|=1$. Wir gehen hier darauf nic näher ein.

Der obige Satz ist eine rein qualitativ pythagoräische Kennzeichnung d Euklidizität. Zum Beweise genügt es, aus der Voraussetzung den genaue Pythagoras, $x\perp y\Rightarrow|x+y|^2=|x|^2+|y|^2$, oder

$$x\perp y,\quad |x|=|y|=1\Rightarrow|\alpha x+\beta y|^2=\alpha^2+\beta^2, \tag{2}$$

herzuleiten. Der Beweis von (2) wird in vier Schritten geführt. Man betrach die von dem in (2) gegebenen Zweibein x, y bestimmte Ebene E und in i die Einheitskugel $|x'|=1$. Sie ist eine geschlossene konvexe Kurve, die d Nullpunkt $x'=0$ im Inneren enthält.

LEMMA 1. *Die Kurve $|x'|=1$ enthält kein geradliniges Segment.*

BEWEIS. Angenommen, das Lemma wäre falsch. Dann gäbe es zwei ve schiedene, vom Nullpunkt aus abgetragene Vektoren x_1, x_2

$$|x_1|=|x_2|=1, \tag{3}$$

mit Endpunkten auf dem geradlinigen Segment. Ist y',

$$|y'|=1,$$

ein Vektor in der Richtung des Segmentes, so folgt

$$x_1\perp y',\quad x_2\perp y'.$$

Es ist

$$x_2=x_1+\alpha y',\quad \alpha>0;$$

$\alpha>0$ darf angenommen werden, da dies sonst durch Vertauschung von x_1, x erreicht werden kann. Durch Anwendung der Voraussetzung des Satzes a das Paar von orthogonalen Zweibeinen

$$\lambda x_1,\mu y';\quad \lambda x_2,\mu y';\quad \lambda\geqq 0,\ \mu\geqq 0,$$

folgt wegen (3), daß

$$|\lambda x_1+\mu y'|=|\lambda x_2+\mu y'|=|\lambda x_1+(\alpha\lambda+\mu)y'|$$

gilt, d.h., daß die Funktion

$$|\lambda x_1+\mu y'|$$

von λ, μ gegenüber der Transformation

$$T:\quad \lambda'=\lambda,\quad \mu'=\alpha\lambda+\mu$$

invariant ist, solange $\lambda\geqq 0$, $\mu\geqq 0$ besteht. Wegen $\alpha>0$ gilt das auch vo allen Iterierten T^n, $n>0$,

$$|\lambda x_1+\mu y'|=|\lambda x_1+(n\alpha\lambda+\mu)y'|.$$

nsbesondere ist für $\lambda = 1$, $\mu = 0$

$$1 = |x_1| = |x_1 + n\alpha y'| \geqq |n\alpha y'| - |x_1| = n\alpha - 1.$$

Dies ist ein Widerspruch, und Lemma 1 ist bewiesen.

Lemma 2. *Aus $x \perp y$ folgt $y \perp x$.*

Beweis. Es darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit

4) $$|x| = |y| = 1$$

ngenommen werden. x, y sind linear unabhängig, und der Vektor y hat inen positiven Minimalabstand von der Geraden αx. Er werde für $\alpha = \alpha_0$ ngenommen. Setzt man

5) $$y' = y - \alpha_0 x,$$

o ist

6) $$p = |y'| > 0, \quad p \leqq |y - 0 \cdot x| = 1, \quad |y'| \leqq |y' - \beta x|$$

ür beliebige β. Also gilt

7) $$y' \perp x.$$

Wegen (4), (6), (7) darf die Voraussetzung unseres Satzes auf das Paar von rthogonalen Zweibeinen

$$\lambda x, \mu y; \quad \frac{\lambda}{p} y', \mu x$$

ngewandt werden, $\lambda \geqq 0$, $\mu \geqq 0$. Daher folgt

$$|\lambda x + \mu y| = \left|\frac{\lambda}{p} y' + \mu x\right| = \left|\left(-\frac{\alpha_0}{p}\lambda + \mu\right) x + \frac{\lambda}{p} y\right|$$

ür alle $\lambda \geqq 0$, $\mu \geqq 0$. Mit anderen Worten, die Funktion

$$|\lambda x + \mu y|$$

st invariant gegenüber der linearen Transformation

8) $$\lambda' = -\frac{\alpha_0}{p}\lambda + \mu, \quad \mu' = \frac{1}{p}\lambda,$$

edenfalls, solange $\lambda \geqq 0$, $\mu \geqq 0$ ist. Die charakteristische Gleichung der Trans-ormationsmatrix,

9) $$\begin{vmatrix} -\frac{\alpha_0}{p} - \varrho & 1 \\ \frac{1}{p} & -\varrho \end{vmatrix} = \varrho^2 + \frac{\alpha_0}{p}\varrho - \frac{1}{p} = 0$$

at wegen $p > 0$ zwei reelle Wurzeln ϱ^+, ϱ^- verschiedenen Vorzeichens. Es ist

10) $$\varrho^+ + \varrho^- = -\frac{\alpha_0}{p}, \quad \varrho^+ \varrho^- = -\frac{1}{p}.$$

Für $\varrho = \varrho^+$ haben die Gleichungen

11) $$\lambda' = \varrho\lambda, \quad \mu' = \varrho\mu,$$

wie man mit Hilfe von (10) ausrechnet, die Lösung

$$\lambda = 1, \quad \mu = -\varrho^-.$$

Für diese positiven Werte von λ, μ ist also

$$|\lambda x + \mu y| = |\lambda' x + \mu' y| = |\varrho^+(\lambda x + \mu y)| = \varrho^+ |\lambda x + \mu y|.$$

Daher ist $\varrho^+ = 1$ und wegen (9), $\varrho = \varrho^+$,

$$p = 1 - \alpha_0. \tag{12}$$

Wegen (6), $p \leqq 1$, ist also $\alpha_0 \geqq 0$. Nun ist aber ganz allgemein die Norm $|x$ eine (nach unten) konvexe Funktion ihres Argumentes. Insbesondere ist al $|y - \alpha x|$ eine konvexe Funktion der Veränderlichen α (Funktion nirgen oberhalb der Sehne). Andererseits ist $|y - \alpha x| \geqq |y| - |\alpha x|$, also wegen ($|y - \alpha x| \geqq 1 - \alpha$, solange $\alpha \geqq 0$. Für $\alpha = \alpha_0$ gilt jedoch die Gleichheit, wie a (12), (5) und (6), erste Gleichung, folgt. Für $\alpha = 0$ gilt die Gleichheit triviale weise. Das ist nur dann möglich, wenn $|y - \alpha x| = 1 - \alpha$ für alle α zwische 0 und α_0 gilt. Wäre nun $\alpha_0 > 0$, so wäre

$$|\lambda y + \mu x| = \lambda + \mu$$

in dem Sektor $\lambda \geqq 0$, $0 \geqq \mu \geqq -\alpha_0 \lambda$ der durch x, y bestimmten Ebene E, d. die Kurve $|x'| = 1$ in E enthielte ein geradliniges Segment, im Widerspru zu Lemma 1. Daher ist $\alpha_0 = 0$, und wegen (5) und (7) gilt $y \perp x$. Lemma ist somit bewiesen.

LEMMA 3. *Die Norm ist symmetrisch,* $|-x| = |x|$.

BEWEIS. Aus Lemma 2 folgt

$$x \perp y \Rightarrow -x \perp y. \tag{13}$$

In der Tat gilt

$$x \perp y \Rightarrow y \perp x \Rightarrow y \perp -x \Rightarrow -x \perp y.$$

Man betrachte nun in irgendeiner, den Nullpunkt enthaltenden Ebene E d beiden Kurven $|x'| = 1$ und $|-x'| = 1$. Jeder von 0 aus abgetragene Radiu vektor wird von jeder der beiden Kurven in genau einem Punkte getroffe und aus (13) folgt, daß die beiden Kurven in den zwei Schnittpunkten m demselben Radiusvektor genau die gleichen Stützrichtungen haben. Dara schließt man, daß die Kurven homothetisch sind. Wegen der Homogenit der Norm muß also $|-x| = c|x|$ für alle x gelten. Ersetzt man darin x dur $-x$, so folgt $c = 1$ und Lemma 3 ist bewiesen.

BEWEIS DES SATZES. Man betrachte die von dem Zweibein in (2),

$$x \perp y, \quad |x| = |y| = 1, \tag{13}$$

bestimmte Ebene E. Wir wissen jetzt, daß $\lambda x \perp \mu y$ für beliebige reelle λ, gilt. Nach der Voraussetzung des Satzes und wegen $|\alpha z| = |\alpha||z|$ hängt d Norm in E,

$$|\lambda x + \mu y|, \tag{14}$$

nur von $|\lambda|$ und $|\mu|$ ab und sie behält denselben Wert, wenn das Zweibe (13) durch irgendein anderes mit denselben Eigenschaften (13) ersetzt wir

Nach Lemma 2 darf z.B. das Zweibein x, y durch das Zweibein y, x ersetzt werden. Es folgt also, daß die Norm (14) in E gegenüber den Spiegelungen

(15) $$\lambda' = -\lambda, \quad \mu' = \mu$$

und

(16) $$\lambda' = \mu, \qquad \mu' = \lambda$$

invariant ist. Es sei

(17) $$z = \alpha x + \beta y, \qquad |z| = 1,$$

ein beliebiger Einheitsvektor in E. Zu ihm existiert ein zweiter derartiger Vektor z', derart, daß

(18) $$z' = \alpha' x + \beta' y, \qquad |z'| = 1, \qquad z \perp z'$$

gilt (Stützvektor von $|x'| = 1$ im Endpunkt von z). z, z' sind linear unabhängig. Da in z' ein Faktor ± 1 verfügbar ist, darf

(19) $$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} > 0$$

vorausgesetzt werden. Nach der Voraussetzung des Satzes gilt

$$|\lambda z + \mu z'| = |\lambda x + \mu y|$$

für beliebige λ, μ, d.h. die Norm (14) ist gegenüber der Transformation

$$\lambda' = \alpha\lambda + \alpha'\mu, \qquad \mu' = \beta\lambda + \beta'\mu$$

invariant. Kombiniert man sie mit jeder der beiden Spiegelungen (15), (16), so erhält man wieder zwei Transformationen, die die Norm ungeändert lassen. Ihre Matrizen sind

$$\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha' \\ -\beta & \beta' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta & \beta' \\ \alpha & \alpha' \end{pmatrix}.$$

Die charakteristische Gleichung der ersten ist

(20) $$\varrho^2 + (\alpha - \beta')\varrho - D = 0.$$

Wegen (19) sind ihre beiden Wurzeln reell und von verschiedenem Vorzeichen Auf Grund der beim Beweise von Lemma 2 angestellten Betrachtung, wobei jetzt jedoch keine Schwierigkeiten mehr mit den Vorzeichen bestehen, schließt man nicht nur, daß die positive Wurzel $= 1$, sondern auch, daß die negative Wurzel $= -1$ ist. Wegen (20) ist daher $\alpha - \beta' = 0$, $D = 1$. Im Falle der zweiten Matrix hat man

$$\varrho^2 - (\beta + \alpha')\varrho - D = 0,$$

und man schließt analog, daß $\beta + \alpha' = 0$ ist. Wegen (19) ist also $D = \alpha^2 + \beta^2 = 1$. Demnach gilt stets

$$|\alpha x + \beta y|^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

solange die linke Seite gleich Eins ist. Wegen der Homogenität beider Seiten gilt das also uneingeschränkt. Damit ist der Satz bewiesen.

Dept. of Math., University of Indiana, Bloomington, Ind. (U.S.A.)

(Eingegangen am 28. Januar 1959)

Synge, J. L.
Math. Zeitschr. 72, 82—87 (1959)

A theory of elasticity in general relativity

In memoriam Leon Lichtenstein

By

J. L. Synge

1. The basic equations

In classical elasticity, the strain (or deformation) of an elastic body is measured relative to a natural (unstrained) state, and the basic stress-strain relation is a linear equation (Hooke's Law) connecting stress and strain.

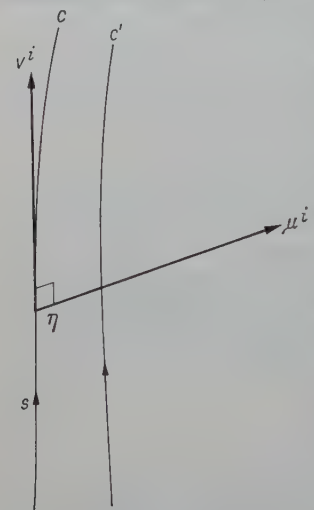


Fig. 1. Two adjacent world lines of particles in an elastic body

These ideas are not easy to carry over into Riemannian space-time in which the histories of particles appear as world lines. The concept of strain has to be reformulated in terms of the geometry of those world lines, and it is hard to see how a "natural" state can exist, since gravity is always operative. On examining the geometrical situation presented by a congruence of world lines, it is found that, though the concept of *strain* escapes us, the concept of *rate of strain* is easy to put into mathematical form. This suggests a revision of the formulation of Hooke's Law. If we use the letters LF to mean "is a linear function of", the classical Hooke's Law reads

(1.1) stress LF strain.

We modify this to read

(1.2) rate of change of stress LF rate of strain.

If this reformulation is accepted, our task is to express it in mathematical symbols, and then, with the aid of Einstein's field equations, to examine the mathematical theory of a gravitating elastic body, particularly in relation to the propagation of elastic waves. That is the purpose of the present paper.

Fig. 1 shows two adjacent timelike world lines C, C', representing the histories of two particles of an elastic body. We denote by V^i the unit tangent vector to C (4-velocity) and by η^i the infinitesimal displacement from C to C', drawn orthogonal to C.

Using a metric tensor g_{ij} for which the normal diagonal elements are $(1, 1, 1, -1)$, and denoting by ds the element of proper time on C (the so called "velocity of light" is unity throughout the paper), we have

$$ds^2 = -g_{ij}\,dx^i\,dx^j, \tag{1.3}$$

and

$$V_i V^i = -1. \tag{1.4}$$

Then it can be shown that the rate of change of the magnitude η of the vector η^i is given by

$$\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{ds} = \sigma_{ij}\mu^i\mu^j, \tag{1.5}$$

where μ^i is the unit vector in the direction of η^i and σ_{ij} is given by[1])

$$2\sigma_{ij} = V_{i|j} + V_{j|i} + V_{i|k}V^k V_j + V_{j|k}V^k V_i, \tag{1.6}$$

the vertical stroke indicating covariant differentiation. It is clear from (1.5) that it is appropriate to call σ_{ij} the *rate of strain tensor*. It has actually only six independent components, since it satisfies the identities

$$\sigma_{ij}V^j = 0. \tag{1.7}$$

For the energy tensor of matter we take the usual form

$$T_{ij} = \varrho V_i V_j - S_{ij}, \tag{1.8}$$

where ϱ is density and S_{ij} the (symmetric) stress tensor. In relativity the stress tensor is often subjected to a condition of orthogonality with the 4-velocity, but that restriction is *not* imposed here; thus in general

$$S_{ij}V^j \neq 0. \tag{1.9}$$

The basic equations which we shall now write down consist of the usual field equations of EINSTEIN and the modified Hooke's Law (1.2). The field equations read

$$G_{ij} = -\varkappa T_{ij}, \tag{1.10}$$

where G_{ij} is the Einstein tensor and $\varkappa = 8\pi\gamma$ (γ = gravitational constant), while (1.2) gives

$$S_{ij|k}V^k = c_{ijkm}\sigma^{km}, \tag{1.11}$$

where the tensor c_{ijkm} corresponds to the usual elastic constants. To avoid complications, we shall consider only the *isotropic* case for which

$$c_{ijkm} = \lambda g_{ij}g_{km} + \mu(g_{ik}g_{jm} + g_{im}g_{jk}); \tag{1.12}$$

here λ and μ are two invariant *elastic coefficients* which we take to be constants, or, more generally, functions of ϱ.

Eliminating S_{ij} by (1.8), we have now before us the following 21 equations.

$$\begin{cases} G_{ij} = -\varkappa T_{ij}, \\ T_{ij|k}V^k = (\varrho V_i V_j)_{|k}V^k - c_{ijkm}\sigma^{km}, \\ V_i V^i = -1. \end{cases} \tag{1.13}$$

[1]) A rigid motion satisfies $\sigma_{ij} = 0$; cf. N. ROSEN, Phys. Rev. **71**, 54 (1947), and G. SALZMAN and A. TAUB, Phys. Rev. **95**, 1659 (1954).

With four coordinate conditions, we have 25 equations for the following 25 unknowns:

$$g_{ij},\ T_{ij},\ V_i,\ \varrho. \tag{1.14}$$

Thus, on the mere basis of counting, we have before us a determinate elastic theory.

2. The Cauchy problem

We now examine the Cauchy problem for the system of equations (1.13), starting from an initial 3-space Σ. We choose a system of skew Gaussian coordinates x^i such that Σ has the equation $x^4=0$ and, throughout space-time,

$$g_{\alpha 4,4}=0, \quad g_{44}=-1, \tag{2.1}$$

where the comma indicates partial differentiation and Greek suffixes take the values 1, 2, 3. These are in fact the four coordinate conditions.

We take as Cauchy data (CD) on Σ the values of

$$g_{\alpha 4},\ g_{\alpha\beta},\ g_{\alpha\beta,4},\ T^i_j,\ V_\alpha,\ \varrho. \tag{2.2}$$

We do not have to consider V_4 because the last of (1.13) gives it algebraically. In the other members of (1.13) and the first of (2.1) we have 23 algebraic equations for the 23 derivatives

$$g_{\alpha 4,4},\ g_{\alpha\beta,44},\ T^i_{j,4},\ V_{\alpha,4},\ \varrho_{,4}. \tag{2.3}$$

If there exists a unique algebraic solution, then we know that in the neighbourhood of Σ the CD (2.2) determine a unique solution of the elastic equations. But if the algebraic equations do not possess a unique solution, then Σ is a *characteristic 3-space*, or, in more physical language, it is an elastic *shock wave*.

We shall use the notation CD for any quantities uniquely determined by the original CD (2.2) and the equations (1.13).

In (2.1) we have $g_{\alpha 4,4}=0$ and we need not consider these terms further. As for $g_{\alpha\beta,44}$, these occur only in the first equations in (1.13), and in those equations the other terms are all CD. It is known that no unique algebraic solution exists if

$$g^{44}=0, \tag{2.4}$$

and here we encounter the first elastic shock waves. The condition (2.4) implies that Σ is a *null surface*, like the history of an optical disturbance in vacuo, and so we get a result we might expect — *elastic shock waves include waves travelling with the fundamental speed in space-time.*

We now suppose Σ chosen so that

$$g^{44}\neq 0, \tag{2.5}$$

and proceed to investigate other shock waves, using a technique due to LICHNEROWICZ[2]). Under the condition (2.5), the equations (1.13) are equivalent to the following set:

$$R_{\alpha\beta} = -\varkappa\left(T_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta} T^k_k\right), \tag{2.6}$$

$$T^i_{j|i} = 0, \tag{2.7}$$

$$T^i_{j|k} V^k = (\varrho V^i V_j)_{|k} V^k - c^i_{\cdot jkm} \sigma^{km}, \tag{2.8}$$

$$V_i V^i = -1, \tag{2.9}$$

together with the initial condition

$$G^4_i + \varkappa T^4_i = 0 \quad \text{on } \Sigma. \tag{2.10}$$

This last is a condition on the CD (2.2), since G^4_i do not involve second derivatives. We suppose it satisfied.

Now (2.6) can be solved, giving

$$g_{\alpha\beta, 44} = \mathrm{CD}, \tag{2.11}$$

and (2.7) gives

$$T^4_{j,4} = \mathrm{CD}. \tag{2.12}$$

Of the quantities (2.3) there remain

$$T^\alpha_{j,4}, \; V_{\alpha,4}, \; \varrho_{,4}, \tag{2.13}$$

and for them we have the equations (2.8). We break these equations into two sets as follows:

$$T^\alpha_{j|k} V^k = (\varrho V^\alpha V_j)_{|k} V^k - c^\alpha_{\cdot jkm} \sigma^{km}, \tag{2.14}$$

$$T^4_{j|k} V^k = (\varrho V^4 V_j)_{|k} V^k - c^4_{\cdot jkm} \sigma^{km}. \tag{2.15}$$

Now by (2.12) the left hand side of (2.15) is CD, and so we have in (2.15) four equations for $V_{\alpha,4}$ and $\varrho_{,4}$. If these four equations can be solved uniquely, the right hand sides of (2.14) become CD, and we can solve for $T^\alpha_{j,4}$ provided V^4 does not vanish. Thus

$$V^4 = 0 \tag{2.16}$$

gives a characteristic. It implies that the world lines of matter lie in the 3-space Σ, and corresponds to a disturbance which has zero velocity relative to the matter.

Dismissing this case, we assume Σ to be such that

$$V^4 \neq 0, \tag{2.17}$$

and we concentrate our attention on the four equations (2.15); if they can be solved for $V_{\alpha,4}$ and $\varrho_{,4}$, then (2.14) gives

$$T^\alpha_{j,4} = \mathrm{CD}. \tag{2.18}$$

[2]) LICHNEROWICZ, A.: Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, p. 31. Paris: Masson & Cie. 1955.

3. Elastic waves

We may write the crucial equations (2.15) in the form

$$(\varrho V^4 V_j)_{|k} V^k - c^{4}_{\cdot jkm} \sigma^{km} = \mathrm{CD}. \tag{3.1}$$

We seek to solve these four equations for $V_{\alpha,4}$ and $\varrho_{,4}$.

Hitherto we have used any skew Gaussian coordinates based on $\Sigma(x^4=0)$, such coordinates being defined by an arbitrary vector field chosen on Σ. We now tie the skew Gaussian coordinates to the matter on Σ by demanding that *the defining vector field shall be tangent to the world lines of the matter.* This tangency holds only on Σ, for the parametric lines of the coordinates are geodesics (by definition), whereas the world lines are not.

With this special choice of coordinates, we have

$$V^\alpha = 0, \quad V^4 = 1 \text{ on } \Sigma, \tag{3.2}$$

and the following special equations result:

$$\left.\begin{array}{c} V_\alpha = g_{\alpha 4}, \quad V_4 = -1, \\ V_{4|j} = 0, \quad V_{4,4} = 0, \quad V^4{}_{,4} = g^{4\alpha} V_{\alpha,4} + \mathrm{CD}, \\ g^{\alpha 4} g_{\alpha 4} = 1 + g^{44}, \quad \sigma_{i4} = 0, \end{array}\right\} \text{ on } \Sigma \tag{3.3}$$

and also

$$\sigma_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(V_\alpha V_{\beta,4} + V_\beta V_{\alpha,4}) + \mathrm{CD} = \tfrac{1}{2}(g_{\alpha 4} V_{\beta,4} + g_{\beta 4} V_{\alpha,4}) + \mathrm{CD} \text{ on } \Sigma. \tag{3.4}$$

It is now easy to see that, if we take $j=4$ in (3.1), we can solve for $\varrho_{,4}$ in terms of $V_{\alpha,4}$ and CD. In fact, we can eliminate $\varrho_{,4}$ from (3.1), and reduce our problem to that of solving for $V_{\alpha,4}$ the three equations

$$K^\nu_\alpha V_{\nu,4} = \mathrm{CD}, \tag{3.5}$$

where

$$K^\nu_\alpha = \varrho\, \delta^\nu_\alpha - c^{4\beta\nu}_{\cdot\cdot 4} g_{\alpha 4} g_{\beta 4} - c^{4\beta\nu}_{\cdot\cdot\alpha} g_{\beta 4}. \tag{3.6}$$

Accordingly

$$\det K^\nu_\alpha = 0 \tag{3.7}$$

is the equation which determines the characteristic 3-spaces (other than those discussed previously).

Introducing the isotropy equation (1.12), we find

$$K^\nu_\alpha = (\varrho - \mu g^{4\beta} g_{4\beta})\, \delta^\nu_\alpha - (\lambda + \mu)\, g^{4\nu} g_{4\alpha}, \tag{3.8}$$

and hence (simplifying the algebra by temporary use of special coordinates to obtain an invariant result) we obtain

$$\det K^\nu_\alpha = [\varrho - (\lambda + 2\mu)\, g^{4\beta} g_{4\beta}]\, [\varrho - \mu g^{4\gamma} g_{4\gamma}]^2. \tag{3.9}$$

Using (3.3), we thus get for the characteristic 3-spaces the equations

$$\left.\begin{array}{l} 1 + g^{44} = \varrho(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ 1 + g^{44} = \varrho\, \mu^{-1} \qquad \text{(repeated)}. \end{array}\right. \tag{3.10}$$

Now a 3-space in space-time may be regarded as the history of a moving wave, and its speed may be computed relative to the world line of an observer. It can be shown that, for the type of coordinates we are using, the speed u of $x^4=0$ relative to the parametric lines of x^4 is given by

$$u^{-2} = 1 + g^{44} = g^{\alpha 4} g_{\alpha 4} \tag{3.11}$$

by (3.3). On applying this kinematical result to (3.10), we see that *elastic waves are propagated, relative to the elastic material, with speeds*

$$u_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}}, \qquad u_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}. \tag{3.12}$$

It is rather remarkable that these values agree precisely with the formulae for the speeds of elastic waves in classical elasticity, λ and μ being the usual elastic constants. A further analysis shows that u_1 corresponds to longitudinal waves (P-waves) and u_2 to transverse waves (S-waves).

This theory was presented in detail in lectures delivered at the International Mathematical Summer Center, Sestriere, 20—30 July, 1958, and in a brief communication to the International Congress of Mathematicians, Edinburgh, 1958. I am indebted to Dr. C. B. Rayner for helpful discussions and suggestions.

Dublin Institute for Advanced Studies

(Eingegangen am 6. März 1959)

Kuratowski, K.
Math. Zeitschr. 72, 88—94 (1959)

Un critère de coupure de l'espace euclidien par un sous-ensemble arbitraire

A la mémoire de Leon Lichtenstein

Par

K. Kuratowski

Soit X un sous-ensemble compact de l'espace euclidien E^n à $n \geqq 2$ dimensions. Soit S_n l'espace E^n augmenté du point à l'infini (sphère n-dimensionnelle) et soit P_n l'espace E^n privé du point 0. D'après un théorème de K. Borsuk, *la condition nécessaire et suffisante pour que le complémentaire $S_n - X$ de X soit connexe, est que l'espace des transformations continues de X en P_n* (désigné par P_n^X) *soit connexe* (voir [1] et [6], p. 347)[1]. Je me propose de démontrer dans cette Note que le théorème de Borsuk reste vrai en omettant l'hypothèse de *compacité* de X (théorème II). Je vais établir en même temps pour l'espace à n dimensions, un théorème suggéré par un énoncé important de S. Eilenberg (voir § 5) concernant le plan (théorème I)[2].

§ 1. Connexité entre deux points. Quasi-composantes

Rappelons qu'un espace (topologique) est dit *connexe entre les points p et q* — en symbole: $p \sim q$ — lorsque tout ensemble qui est à la fois fermé et ouvert et qui contient l'un de ces points contient aussi l'autre.

D'une façon plus générale, Z étant un sous-ensemble de l'espace envisagé et p et q deux points de Z, nous écrirons

$$p \sim q \quad \textit{dans} \quad Z,$$

lorsque Z, considéré comme l'espace, est connexe entre p et q; autrement dit, lorsqu'il est impossible de décomposer Z en deux ensembles séparés P et Q (c'est-à-dire tels que $\overline{P} \cap Q = 0 = P \cap \overline{Q}$) de façon que $p \in P$ et $q \in Q$.

On démontre facilement l'implication suivante:

1.1 $(p \sim q \textit{ dans } Z) \Rightarrow (p \sim q \textit{ dans } W \textit{ pour tout } W \supset Z)$.

Pour les espaces métriques on a l'énoncé plus précis suivant:

1.2 $(p \sim q \textit{ dans } Z) \equiv (p \sim q \textit{ dans } G \textit{ pour tout } G \textit{ ouvert} \supset Z)$.

[1] Dans les énoncés précités on considère la sphère S_{n-1} à la place de l'espace P_n. Cela ne présente pas de différence essentielle.

[2] Ces deux résultats ont été signalés par moi, sans démonstration, au Congrès d'Edinburgh (le 15 Août 1958).

En effet, en supposant que Z n'est pas connexe entre p et q, il existe une décomposition de Z en deux ensembles séparés P et Q contenant respectivement p et q. Or, d'après un théorème de TIETZE sur les espaces métriques (cf. [5], p. 128, th. 5), on peut faire correspondre aux ensembles P et Q deux ensembles ouverts et disjoints A et B tels que $P \subset A$ et $Q \subset B$. En posant $G = A \cup B$, la relation «$p \sim q$ dans G» est donc en défaut.

On constate aussitôt que:

1.3 *La relation $p \sim q$ est une relation d'équivalence.*

Les classes d'équivalence définies par cette relation sont nommées (d'après HAUSDORFF) *quasi-composantes*. La quasi-composante du point p c'est donc la partie commune de tous les ensembles fermés-ouverts qui contiennent p.

§ 2. Espace fonctionnel Y^X

Nous désignons dans ce § par X et Y des espaces métriques arbitraires.

Le symbole Y^X désigne, comme d'habitude, l'ensemble des transformations continues de X en sous-ensembles de Y. Dans le cas particulier où X est compact, on confère à l'ensemble Y^X le caractère d'espace topologique (même métrique), en entendant par convergence des fonctions (points de Y^X) la convergence uniforme. Dans le cas général, on introduit la topologie dans Y^X en définissant la fermeture de $\Phi \subset Y^X$ par l'équivalence (voir [6], Appendice)

$$(1) \qquad (f \in \bar{\Phi}) \equiv (f|F \in \overline{\Phi|F} \text{ quel que soit } F \text{ compact} \subset X)^3),$$

la fermeture dans le membre droit étant conçue dans le sens de la topologie de Y^F.

On démontre sans peine que, la fermeture $\bar{\Phi}$ étant définie par la formule (1), Y^X est un espace topologique (complètement régulier). Evidemment, dans le cas où X est compact, la topologie de Y^X coïncide avec celle de convergence uniforme (et, plus généralement: si X est localement compact — avec celle de convergence continue). Une autre conséquence immédiate de l'équivalence (1) est la continuité de l'opération $f|F$ (considérée, pour F fixe, comme fonction de f); plus précisément:

2.1 *L'opération $f|F$ transforme de façon continue l'espace Y^X en sous-ensemble de Y^F.*

On démontre aussi facilement l'énoncé suivant:

2.2 *Etant donnée une fonction h de deux variables $x \in X$ et $t \in T$, où T est compact, posons*

$$(2) \qquad g(t) = h(x, t).$$

[3]) $f|F$ désigne la fonction partielle qui s'obtient de f en restreignant la variabilité de son argument à l'ensemble F. Le symbole $\Phi|F$ désigne l'ensemble des fonctions partielles $f|F$ ou $f \in \Phi$.

On a alors l'équivalence suivante:

$$h \in Y^{X \times T} \equiv g \in (Y^X)^T, \tag{3}$$

autrement dit, *pour que la fonction g soit continue, il faut et il suffit que l le soit.*

Voici une conséquence importante de 2.2:

2.3. *Soient f_0 et f_1 deux fonctions-éléments de Y^X. Pour que ces fonction soient homotopes, il faut et il suffit qu'elles appartiennent (considerées comm points de Y^X) à un arc contenu dans l'espace Y^X.*

En effet, en supposant que f_0 et f_1 sont homotopes, il existe (d'après l définition d'homotopie) une fonction $h \in Y^{X \times T}$, où T désigne l'intervalle 0 1 telle que $h(x, 0) = f_0(x)$ et $h(x, 1) = f_1(x)$. On a donc suivant (2): $f_0 = g(0$ et $f_1 = g(1)$, et par conséquent $f_0, f_1 \in g(T) \subset Y^X$. La fonction g étant continu [d'après (3)], l'ensemble $g(T)$, comme image continue de l'intervalle, contien un arc unissant f_0 et f_1.

Réciproquement: si A est un arc unissant f_0 à f_1 dans Y^X, il admet un représentation continue g sur l'intervalle $T = 0\,1$ telle que $g(0) = f_0$, $g(1) = f$ et $g(T) = A$. En appliquant l'équivalence (3) (de droite à gauche), on e conclut que f_0 et f_1 sont homotopes.

§ 3. Composantes de l'espace Y^X

X et Y désigneront dans ce § des espaces métriques séparables, dont Y est un *rétracte de voisinage*[4]).

Rappelons d'abord deux théorèmes importants qui interviendront dan la suite:

3.1. *Si X est compact, les composantes*[5]) *de l'espace Y^X sont fermées-ouverte et connexes par arcs* (cf. [6], p. 260, théorème 3).

3.2. *Théorème de* K. BORSUK ([2], cf. [6], p. 278, th. 3). *Soient: F u sous-ensemble compact de X, Y un rétracte de voisinage, $f \in Y^X$ et $g \in Y^F$. S les fonctions $f|F$ et g sont homotopes, il existe une extension $g^* \in Y^X$ de g qu est homotope à f, donc* (selon 2.3) *qui se laisse unir à f par un arc $\subset Y^X$.*

Autrement dit (en tenant compte de 3.1):

Si les fonctions $f|F$ et g appartiennent à la même composante de Y^F, g e de la forme $g = g^*|F$ où g^* et f appartiennent à la même composante de Y^X

3.3. *Si Γ est une composante de Y^X, l'ensemble $\Gamma|F$ est une composan de Y^F, quel que soit F compact $\subset X$.*

[4]) Un espace (métrique séparable) Y est dit un *rétracte de voisinage*, si pour tout espac métrique séparable X, tout sous-ensemble fermé F de X et toute fonction $f \in Y^F$, il exist un entourage E de F et une extension $g \in Y^E$ de f.

[5]) On appelle *composante* d'un espace (non vide) X tout sous-ensemble connexe de X qui n'est contenu dans aucun autre sous-ensemble connexe de X.

En effet[6]), Γ étant connexe, $\Gamma|F$ l'est également (comme image continue e Γ selon 2.1). Il existe donc une composante Δ de Y^F telle que $(\Gamma|F)\subset\Delta$. s'agit de montrer que $(\Gamma|F)=\Delta$, autrement dit, que pour tout $g\in\Delta$, on a $\in(\Gamma|F)$.

Or soit $f\in\Gamma$. Il vient $(f|F)\in(\Gamma|F)$, d'où $(f|F)\in\Delta$, et on conclut de 3.2 ue $g=g^*|F$ où $g^*\in\Gamma$. Donc $g\in(\Gamma|F)$.

3.4. *Γ étant une composante de Y^X, on a l'équivalence:*

$$(f\in\Gamma)\equiv[(f|F)\in(\Gamma|F)\ \textit{pour tout } F\ \textit{compact}\subset X].$$

En effet, comme composante de Y^X, Γ est un ensemble fermé, et on déduit .4 de la formule (1) en y substituant Γ à Φ.

Passons au théorème important suivant:

3.5. *Les quasi-composantes de Y^X sont connexes*; autrement dit: *dans espace Y^X, les quasi-composantes coïncident avec les composantes.*

En conséquence, *la relation $f_0\sim f_1$, où $f_0, f_1\in Y^X$, veut dire que f_0 et f_1 appar-ennent à la même composante de Y^X.*

Soient en effet: Γ une composante de Y^X, $f_0\in\Gamma$ et $f_1\in(Y^X-\Gamma)$. Il s'agit e montrer que f_1 n'appartient pas à la quasi-composante de f_0, c'est-à-dire u'il existe un ensemble Φ fermé-ouvert tel que $f_0\in\Phi$ et $f_1\in(Y^X-\Phi)$.

Or, il existe d'après 3.4 un F compact $\subset X$ tel que $(f_1|F)\in[Y^F-(\Gamma|F)]$, t il ne reste qu'à définir Φ par l'équivalence:

$$(f\in\Phi)\equiv[(f|F)\in(\Gamma|F)].$$

Car, F étant compact, l'ensemble $\Gamma|F$, comme composante de Y^F, est ermé-ouvert dans Y^F (selon 3.1), donc — l'opération $f|F$ étant continue cf. 2.1) — l'ensemble Φ est fermé-ouvert dans Y^X.

3.6. $(f_0\sim f_1)\equiv[(f_0|F)\sim(f_1|F)\ \textit{pour tout } F\ \textit{compact}\subset X]$.

Soit, en effet, Γ_0 la composante de f_0. Il vient d'après 3.5 et 3.4:

$$(f_0\sim f_1)\equiv(f_1\in\Gamma_0)\equiv[(f_1|F)\in(\Gamma_0|F)]\equiv[(f_1|F)\sim(f_0|F)]$$

uisque $\Gamma_0|F$ est la composante de $f_0|F$ (dans Y^F, selon 3.3).

§ 4. Théorèmes de dualité

Théorème I. *Soient $X\subset E^n$ et $p, q\in S_n-X$. On a l'équivalence*

4) $$(x-p\sim x-q\ \textit{dans}\ P_n^X)\equiv(p\sim q\ \textit{dans}\ S_n-X);$$

utrement dit: *les translations $x-p$ et $x-q$ (où $x\in X$)[7]) appartiennent à la ême composante de l'espace P_n^X dans ce cas et dans ce cas seulement lorsque s points p et q appartiennent à la même quasi-composante de S_n-X.*

[6]) Nous reproduisons ici la démonstration d'un théorème analogue, énoncé pour le as particulier des espaces X localement compacts. Voir [7].

[7]) Nous convenons que $x-q=1$ si $q=\infty$.

Démonstration. Remarquons d'abord que dans le cas particulier où est compact, l'équivalence (4) veut dire que, pour que les fonctions $x-$ et $x-q$ soient homotopes sur X relativement à P_n (c'est-à-dire: se laisse unir par un arc dans l'espace P_n^X), il faut et il suffit que les points p et q laissent unir par un arc dans $S_n - X$; car, en supposant X compact, les co posantes de P_n^X sont connexes par arcs (cf. 3.1), ainsi que les quasi-composant de $S_n - X$ (qui sont alors des ensembles ouverts connexes). Ainsi formul l'équivalence (4) (pour X compact) est un fait connu (cf. par exemple [5 p. 97, th. VI, 10).

Le théorème I étant donc vrai dans le cas de X compact, on n'a qu appliquer, dans le cas de X arbitraire, les équivalences 3.6 et 1.2 (en posa $G = S_n - F$ et $Z = S_n - X$):

$$(x-p \sim x-q \text{ dans } P_n^X) \equiv [(x-p|F) \sim (x-q|F) \text{ pour tout } F \text{ compact} \subset X$$
$$\equiv (p \sim q \text{ dans } S_n - F \text{ pour tout } F \text{ compact} \subset X)$$
$$\equiv (p \sim q \text{ dans } G \text{ pour tout } G \text{ ouvert} \supset S_n - X)$$
$$\equiv (p \sim q \text{ dans } S_n - X).$$

Théorème II. *Soit $X \subset E^n$. Pour que l'espace P_n^X soit connexe, il faut et suffit que l'ensemble $S_n - X$ le soit.*

Démonstration. 1° Admettons que l'ensemble $S_n - X$ n'est pas connex Il se décompose alors en deux ensembles séparés et non vides P et Q. Poso $p \in P$ et $q \in Q$. Le membre droit de (4) est donc en défaut et d'après le théor me I, il en est de même du membre gauche. Cela veut dire que les fonctio $x-p$ et $x-q$ appartiennent à deux composantes distinctes de l'espace P_n^X. Cet espace n'est donc pas connexe.

2° Admettons que $S_n - X$ est connexe. Soit $f_0, f_1 \in P_n^X$. Il s'agit de prouv que $f_0 \sim f_1$, donc, selon 3.6, que pour tout F compact $\subset X$, on a $f_0|F \sim f_1|$

Soit R la composante de $S_n - F$ qui contient l'ensemble (connexe) $S_n -$ Posons

$$F^* = S_n - R, \quad \text{d'où } F \subset F^* \subset X.$$

Le complémentaire de F^* étant connexe (comme égal à R) et le théorème étant vrai pour les ensembles compacts (comme nous l'avons indiqué début), il vient $f_0|F^* \sim f_1|F^*$. On en conclut finalement que $f_0|F \sim f_1|$ (en tenant compte de 3.6 où l'on remplace X par F^*).

§ 5. Remarques

Remarque 1. Comme nous l'avons indiqué au § 3, si X est compact et est un rétracte de voisinage, les composantes de l'espace Y^X sont connex par arcs (théorème 3.1). Il importe de remarquer que, dans cet énoncé, l'hyp thèse de compacité ne peut pas être omise, même dans le cas où $Y = I$

Plus encore, on a le théorème général suivant:

X étant un sous-ensemble du plan tel que l'ensemble $S_2 - X$ est connexe ans être un semi-continu[8]*), l'espace P_2^X est connexe sans être connexe par arcs.*

Cela résulte du théorème II, rapproché du théorème suivant de S. Eilenerg ([3], p. 75, cf. [6], p. 389):

Soient $X \subset E^2$ et $p, q \in S_2 - X$. On a l'équivalence:

$$(x - p \text{ et } x - q \text{ appartiennent à un arc dans } P_2^X)$$
$$\equiv (p \text{ et } q \text{ appartiennent à un continu dans } S_2 - X).$$

Ainsi, par exemple, si l'on prend pour X l'ensemble formé par la réunion es segments $|x| \leqq 1$, $y = \pm 1/n$, et du segment $|x| \leqq 1$, $y = 0$, privé du point), 0), les fonctions $f_0(x) = x$ et $f_1(x) = 1$ $(x \in X)$ ne se laissent pas unir par n arc dans P_2^X [car il n'existe évidemment aucun continu dans $S_2 - X$ qui nisse le point (0, 0) au point à l'infini].

Remarque 2. La singularité envisagée dans la remarque 1 — à savoir ue les composantes de P_2^X ne sont pas connexes par arcs — ne peut pas se résenter pour X *ouvert* $\subset E^2$. On montre, en effet, que dans ce cas, si f_0 et f_1 ont deux fonctions (éléments de P_n^X) homotopes sur tout sous-ensemble ompact de X, ces fonctions sont homotopes (sur X tout entier) (voir [6], . 329, 4).

Il est cependant remarquable que la singularité en question se présente armi les sous-ensembles ouverts de l'espace à *trois* dimensions (comme me a fait observer J. H. C. Whitehead, voir [9]).

Remarque 3. Les théorèmes I et II ont un caractère purement *qualitatif.* Des théorèmes *quantitatifs* (concernant, par exemple, le nombre des compoantes de $S_n - X$) s'obtiennent en considérant l'ensemble des composantes e P_n^X comme groupe relativement à la *multiplication cohomotopique* de Borsuk voir par exemple [8]). On montre alors — en précisant le théorème II — ue, pour que le nombre des composantes de $S_n - X$ soit $m+1$, il faut et suffit que le groupe des composantes de P_n^X soit isomorphe au groupe (additif) es points entiers de l'espace E^m. Le théorème I se laisse préciser comme uit: si les points $p_1, \ldots, p_m$ appartiennent à des quasi-composantes bornées e $S_n - X$, différentes deux à deux, les translations $x - p_1, \ldots, x - p_m$ sont néairement indépendantes dans le sens de la multiplication cohomotopique, 'est-à-dire qu'une relation de la forme

$$(x - p_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - p_m)^{k_m} \sim 1$$

nplique que $k_1 = 0, \ldots, k_m = 0$.

Les démonstrations de ces théorèmes (qui ont recours à des méthodes ien moins élémentaires que celles de la note présente) paraîtront prochainement dans la nouvelle édition du II-ème volume de ma Topologie.

[8]) Un ensemble est dit un *semi-continu* lorsque tout couple de ses points s'y laisse nir par un continu.

Ouvrages cités

[1] Borsuk, K.: Über Schnitte der n-dimensionalen Euklidischen Räume. Mat Ann. **106** (1932). — [2] Borsuk, K.: Sur les prolongements des transformations continu Fund. Math. **28**, 99—110 (1936). — [3] Eilenberg, S.: Transformations continues circonférence et la topologie du plan. Fund. Math. **26**, 61—112 (1936). — [4] Hur wicz, W., and H. Wallman: Dimension theory. Princeton Math. Series 1948. [5] Kuratowski, K.: Topologie, vol. I, Monogr. Mat., 4-me éd. 1958. — [6] Kur towski, K.: Topologie, vol. II, 3-me éd. 1959. — [7] Kuratowski, K.: Sur les co posantes de l'espace des transformations d'un espace localement compact en un rétrac de voisinage. Bull. Acad. Pol. **6**, 565—571 (1958). — [8] Kuratowski, K.: Cohomotop multiplication and duality theorems concerning arbitrary subsets of Euclidean spac Bull. Acad. Pol. **6**, 753—758 (1958). — [9] Steenrod, N. E.: Regular cycles of compa metric spaces. Ann. of Math. **41**, 833—851 (1940).

Institut Mathématique de l'Académie Polonaise des Sciences
et
Université de Varsovie, Warszawa (Pologne)

(Eingegangen am 21. März 1959)

ILLE, E.
ath. Zeitschr. 72, 95—106 (1959)

An Application of Prüfer's Method to a Singular Boundary Value Problem

In memoriam Leon Lichtenstein

By

Einar Hille *

1. Introduction. In 1926 H. Prüfer [7] introduced a powerful method or the study of regular boundary value problems for ordinary linear second rder differential equations. This method is based on a clever use of polar oordinates and leads to a simple proof of the existence of infinitely many haracteristic values as well as to estimates of the latter and of the charac-eristic functions. See also the presentation in E. Kamke [5] pp. 274—295. n recent years several other applications of the method have been given. Ve mention only the papers by P. Hartman [1] and R. A. Moore [6].

In the present paper we shall employ a variant of the method for a study f the rate of growth of the characteristic values of a particular singular oundary value problem. Let $b(x)$ be a positive and continuous function efined in $[0, \infty)$, which will be further restricted below, and consider the ystem

$$b(x)\,y'' + \lambda\,y = 0, \tag{1.1}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \tag{1.2}$$

Ve ask for what values of λ does there exist a solution $y_0(x, \lambda)$ of this system uch that $y_0(x, \lambda) \in C[0, \infty]$, that is, such that $y_0(x, \lambda)$ tends to a finite limit s $x \to \infty$. These values of λ form the *spectrum* of the boundary value problem = the spectrum of the operator $-b(x)\,d^2/dx^2$ in the space $C[0, \infty]$ when estricted to elements satisfying (1.2)). In the cases considered here we shall ave a *pure discrete point spectrum* $\{\lambda_n\}$ where

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots, \quad \lambda_n \to \infty.$$

Our main concern will be with the rate of growth of λ_n as a function of n.

We say that the equation (1.1) is

(1) *oscillatory* in $[0, \infty)$ if there exists a solution, not identically zero, which has infinitely many zeros in the interval;

(2) *non-oscillatory* in $[0, \infty)$ if every solution has a finite number of zeros here; and

* This research was supported by the United States Air Force through the Office f Scientific Research of the Air Research and Development Command under Contract No. SAR/AF 49 (638) 224.

(3) *strictly non-oscillatory* in $[a, \infty)$ if every solution has at most one zer in $[a, \infty)$.

For the boundary problem under consideration we may disregard th oscillatory case since in this case the spectrum would contain the positiv real axis in the λ-plane. In order that (1.1) be non-oscillatory for every fixe positive λ, we must have

$$\lim_{x\to\infty} x\int_x^\infty \frac{ds}{b(s)} = 0. \tag{1.3}$$

See [2], pp. 243—246. But this condition is not sufficient to guarantee th existence of solutions in $C[0, \infty]$. If $y_0(x, \lambda) \in C[0, \infty]$, we may assum that its sign is ultimately positive so that the sign of $y_0''(x, \lambda)$ is ultimatel negative and the curve $y = y_0(x, \lambda)$ is concave downwards. Thus $y_0(x, \lambda$ must tend to a finite positive limit. For this to be the case it is necessar and sufficient that

$$\int_0^\infty \frac{s\,ds}{b(s)} < \infty. \tag{1.4}$$

In this case we have two linearly independent solutions of the form

$$y_1(x, \lambda) = x[1 + o(1)], \qquad y_2(x, \lambda) = 1 + o(1) \tag{1.5}$$

and the characteristic values of the boundary problem are those values of for which $y_0(x, \lambda)$ and $y_2(x, \lambda)$ are linearly dependent.

The existence of a point spectrum $\{\lambda_n\}$, with the property

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\lambda_n} < \infty, \tag{1.6}$$

may be concluded from the results of [3], Theorem 11.3, by suitable specializa tion. One takes $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$, and $b(-x) = b(x)$. The last assumptio implies that the characteristic values contain an infinite subset correspondin to odd characteristic functions. Such a function satisfies condition (1.2), suitably normalized, and is consequently a solution of the boundary valu problem (1.1) and (1.2).

In a later paper [4], the author examined the rate of growth of the λ and of the C-norms of the characteristic functions $\omega_n(x)$ if

$$\int_{-\infty}^\infty [\omega_n(x)]^2 \frac{dx}{b(x)} = 1.$$

These results also have a bearing on the present problem when $b(x) = b(-x$ From these results one can conclude that there are two essentially differen subcases according as the integral

$$J \equiv \int_0^\infty \frac{ds}{[b(s)]^{\frac{1}{2}}} \tag{1.7}$$

is finite or infinite.

In the first case one finds that

$$\lambda_n = O(n^2)$$

and the rate of growth of $b(x)$ appears to affect the distribution of the λ_n's very little, if at all, as long as $J < \infty$.

In the second case, called the *fringe case* below, the rate of divergence of the integral affects the rate of growth of the λ_n's sharply, though it was not possible with the aid of the methods of [4] to prove that the estimates obtained there are of the correct order of magnitude.

This gap will be covered in the present paper where we obtain sharper estimates also in the fringe case. We shall prove the two theorems that follow.

THEOREM 1. *Suppose that* $b(x) = (x+1)^2 \omega(x)$ *where* (i) $\omega(x) > 0$, (ii) $\omega(x)$ *is continuously differentiable and* $\omega'(x) > 0$ *for large* x, *and* (iii) $J < \infty$. *Then the* n*-th characteristic value of the boundary value problem* (1.1) *and* (1.2) *satisfies*

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{J}\right)^2 [1 + o(1)], \qquad n \to \infty. \tag{1.8}$$

THEOREM 2. *Suppose that* (i) *and* (ii) *hold but not* (iii). *Suppose instead that* (iv) $\omega(x)$ *is feebly increasing,* (v) (1.4) *holds, and* (vi) *there exists an integer* $p \geqq 1$ *such that if*

$$L_p(x) = \log x \log_2 x \dots \log_p x, \tag{1.9}$$

then

$$\lim_{x \to \infty} \begin{matrix} \sup \\ \inf \end{matrix} \frac{[\omega(x)]^{\frac{1}{2}}}{L_p(x)} \int_0^x \frac{ds}{(1+s)\,[\omega(s)]^{\frac{1}{2}}} = \begin{matrix} \mu_p \\ \beta_p \end{matrix}, \tag{1.10}$$

where

$$1 \leqq \beta_p \leqq \mu_p < \infty$$

except for $p = 1$ *when we require* $1 < \beta_1$. *Then*

$$\lambda_n = \varrho_n^2 \omega[L_p^{-1}(\sigma_n n)] \tag{1.11}$$

where $\varrho_n > \frac{1}{2}$ *and tends to* $\frac{1}{2}$ *when* $n \to \infty$. *Further* $L_p^{-1}(\cdot)$ *is the inverse function of* $L_p(\cdot)$. *The limits of indetermination of* σ_n *are*

$$\frac{2\pi}{\mu_1 + 1} \leqq \liminf \sigma_n \leqq \limsup \sigma_n \leqq \frac{2\pi}{\beta_1 - 1}, \qquad p = 1, \tag{1.12}$$

$$\frac{2\pi}{\mu_p} \leqq \liminf \sigma_n \leqq \limsup \sigma_n \leqq \frac{2\pi}{\beta_p}, \qquad p > 1. \tag{1.13}$$

Similar results hold if (1.2) is replaced by other boundary conditions of the usual type.

We say that $\omega(x)$ is *feebly increasing* if for every $\varepsilon > 0$ and $C > 1$ there exists an $x(\varepsilon, C)$ such that

$$\omega(x) < \omega(y) < (1+\varepsilon)\,\omega(x) \quad \text{when} \quad x(\varepsilon, C) \leqq x < y < C x. \tag{1.14}$$

Further, as usual, $\log_p x$ denotes the p times iterated logarithm.

Without restricting the generality we may assume that $\omega'(x)>0$ for $x>0$. This will be done below.

2. The Polar Coordinates. Let $y_0(x, \lambda)$ be the solution of (1.1) and (1.2) where $0<\lambda$. Using a modification of PRÜFER's device, we introduce polar coordinates R, Θ as follows. We set

$$y_0(x, \lambda) = [b(x)]^{\frac{1}{4}} R(x) \sin[\Theta(x)], \tag{2.1}$$

$$y_0'(x, \lambda) = \lambda^{\frac{1}{2}} [b(x)]^{-\frac{1}{4}} R(x) \cos[\Theta(x)]. \tag{2.2}$$

Here and below all roots are taken to be positive. Substitution of these expressions into (1.1) gives two equations which may be solved for $R'(x)$ and $\Theta'(x)$ with the following result:

$$\frac{R'(x)}{R(x)} = \frac{1}{4}\frac{b'(x)}{b(x)} \cos[2\Theta(x)], \tag{2.3}$$

$$\Theta'(x) = \left\{\frac{\lambda}{b(x)}\right\}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\frac{b'(x)}{b(x)} \sin[2\Theta(x)]. \tag{2.4}$$

The existence of $b'(x)$ follows from condition (ii); $b'(x)$ is positive for all x since we assume that $\omega'(x)$ has this property.

The second of these equations with the initial condition

$$\Theta(0) = 0$$

determines $\Theta(x) = \Theta(x, \lambda)$ uniquely for all $x>0$. Once $\Theta(x)$ is known, we can find $R(x) = R(x, \lambda)$ from the first equation together with the initial condition

$$R(0) = \lambda^{-\frac{1}{2}} [b(0)]^{\frac{1}{4}}$$

which follows from (2.2) and (1.2). We note that

$$[R(x, \lambda)]^2 = [b(x)]^{-\frac{1}{2}} [y_0(x, \lambda)]^2 + \frac{1}{\lambda} [b(x)]^{\frac{1}{2}} [y_0'(x, \lambda)]^2, \tag{2.5}$$

whence it follows that $R(x, \lambda)>0$ for all x. More precisely, (2.3) shows that

$$\lambda^{-\frac{1}{2}} [b(x)]^{-\frac{1}{4}} < R(x, \lambda) < \lambda^{-\frac{1}{2}} [b(x)]^{\frac{1}{4}}. \tag{2.6}$$

We shall devote most of our attention to $\Theta(x, \lambda)$. This function is chosen so that $y_0(x, \lambda)=0$ if and only if $\Theta(x, \lambda) \equiv 0 \pmod{\pi}$ while $y_0'(x, \lambda)=0$ if an only if $\Theta(x, \lambda) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

LEMMA 2.1. *For each fixed $x>0$, the arc $\Theta(x, \lambda)$ is an increasing function of λ for $0<\lambda$.*

This follows from the fact that the right hand side of (2.4) is an increasing function of λ for $0<\lambda$. A formal proof can be given along the lines of that of Hilfsatz 1 in E. KAMKE [5] p. 274. As a function of x for λ fixed, $\Theta(x, \lambda)$ need not be strictly increasing. It will certainly have this property as long as

$$\frac{b'(x)}{[b(x)]^{\frac{1}{2}}} < 4\lambda^{\frac{1}{2}},$$

but this inequality will be reversed for large values of x. In any case, however, the integral part of

$$\frac{2}{\pi}\Theta(x,\lambda)$$

is never decreasing, for equation (2.4) shows that $\Theta'(x,\lambda)>0$ at the points where $2\Theta(x,\lambda)$ is a multiple of π. Integration of (2.4) gives the formula

$$\Theta(x,\lambda)=\lambda^{\frac{1}{2}}\int_0^x\frac{ds}{[b(s)]^{\frac{1}{4}}}-\frac{1}{4}\int_0^x\frac{b'(s)}{b(s)}\sin[2\Theta(s,\lambda)]\,ds \tag{2.7}$$

which is basic for our discussion.

We note next that in both cases under consideration, condition (1.4) is satisfied so that equation (1.1) is non-oscillatory in the interval $[0,\infty)$. In the case of Theorem 2, this is part of the assumptions, but for Theorem 1 it follows from (ii) and (iii). Thus $y_0(x,\lambda)$ has a finite number of zeros on $(0,\infty)$. Suppose the number is n and let us denote the last zero by $x_n(\lambda)$.

LEMMA 2.2. *We have* $\Theta(x_n(\lambda),\lambda)=n\pi$ *and*

$$n\pi<\Theta(x,\lambda)<(n+\tfrac{1}{2})\pi \quad \textit{for} \quad x_n(\lambda)<x<\infty. \tag{2.8}$$

The first assertion follows from the definition of $x_n(\lambda)$ together with the fact that the integral part of $\frac{1}{\pi}\Theta(x,\lambda)$ is a never decreasing step function whose jumps are located at the zeros of $y_0(x,\lambda)$. From this fact we also get the first part of (2.8). Since the integral part of $\frac{2}{\pi}\Theta(x,\lambda)$ is also never decreasing with jumps at the zeros of $y_0(x,\lambda)$ $y_0'(x,\lambda)$, the second part of the inequality is equivalent to the assertion that $y_0'(x,\lambda)$ does not change its sign in $[x_n(\lambda),\infty)$. Suppose that $y_0(x_0,\lambda)>0$, $y_0'(x_0,\lambda)=0$, $x_n(\lambda)<x_0<\infty$, so that $y_0(x,\lambda)$ has a maximum at $x=x_0$. Since $y_0(x,\lambda)$ cannot have a zero beyond x_0 it must tend to a positive finite limit as $x\to\infty$. This calls for a change in sign of $y''(x,\lambda)$. Since the sign of the latter is opposite to that of $y_0(x,\lambda)$, we see that this situation cannot arise and $y_0'(x,\lambda)$ must keep a constant sign. This completes the proof of the lemma.

LEMMA 2.3. *We have*

$$\lim_{x\to\infty}\Theta(x,\lambda)=n\pi \quad \textit{or} \quad (n+\tfrac{1}{2})\pi, \tag{2.9}$$

according as $y_0(x,\lambda)$ *is unbounded or bounded as* $x\to\infty$.

If $y_0(x,\lambda)$ is unbounded, then it is of the form

$$y_0(x,\lambda)=C\,x\,[1+o(1)], \qquad y_0'(x,\lambda)=C\,[1+o(1)]$$

by formula (1.5). We now refer to formulas (2.1), (2.2), and (2.6). Since $y_0'(x,\lambda)\to C\neq 0$, we see that $\cos[\Theta(x,\lambda)]$ and $[b(x)]^{-\frac{1}{4}}R(x,\lambda)$ must be bounded away from zero. This means that

$$[b(x)]^{\frac{1}{4}}R(x,\lambda)>K[b(x)]^{\frac{1}{4}}=K(x+1)\,[\omega(x)]^{\frac{1}{4}}.$$

Since $x^{-1}y_0(x, \lambda)$ is bounded away from zero, this requires that

$$[\omega(x)]^{\frac{1}{2}} \sin[\Theta(x, \lambda)]$$

is bounded and this in turn shows that the sine factor must tend to zero. In view of (2.8) we conclude that $\Theta(x, \lambda) \to n\pi$ and, more precisely,

$$[\omega(x)]^{\frac{1}{2}} \{\Theta(x, \lambda) - n\pi\} \tag{2.10}$$

is bounded.

If, on the other hand, $y_0(x, \lambda)$ is bounded, then

$$y_0(x, \lambda) = C[1 + o(1)], \qquad y_0'(x, \lambda) = o(1).$$

Since (1.1) gives

$$-y_0'(x, \lambda) = \lambda \int_x^\infty \frac{y_0(s, \lambda)}{b(s)}\, ds,$$

we see that

$$[b(x)]^{\frac{1}{2}} |y_0'(x, \lambda)| < |C|\, \lambda [b(x)]^{\frac{1}{2}} \int_x^\infty \frac{ds}{b(s)}$$

$$= |C|\, \lambda(x+1)\, [\omega(x)]^{\frac{1}{2}} \int_x^\infty \frac{ds}{(s+1)^2 \omega(s)} < |C|\, \lambda [\omega(x)]^{-\frac{1}{2}}.$$

According to (2.2) we have

$$[b(x)]^{\frac{1}{2}} y_0'(x, \lambda) = \lambda^{\frac{1}{2}} [b(x)]^{\frac{1}{2}} R(x, \lambda) \cos[\Theta(x, \lambda)]$$

and here the multiplier of the cosine is bounded away from zero by (2.6). It follows that $\cos[\Theta(x, \lambda)]$ must tend to zero and by (2.8) and the previous estimate we must have that

$$[\omega(x)]^{\frac{1}{2}} \{\Theta(x, \lambda) - (n + \tfrac{1}{2})\pi\} \tag{2.11}$$

is bounded. The last two numbered formulas obviously prove Lemma 2.3 in a stronger form.

COROLLARY. *If μ is a characteristic value and if the corresponding characteristic function $y_0(x, \mu)$ has n positive zeros, then*

$$\lim_{x \to \infty} \Theta(x, \mu) = (n + \tfrac{1}{2})\pi. \tag{2.12}$$

3. The Characteristic Values. Though the existence of the characteristic values of this singular boundary value problem is known, we shall take another look at the problem with a view of showing that in the preceding Corollary we can let $n = 0, 1, 2, \ldots$, that is, the n-th characteristic function has exactly n zeros.

According to Lemma 2.1, $\Theta(x, \lambda)$ is an increasing function of λ for $0 < \lambda$. The value $\lambda = 0$ is singular, as we can see from (2.2), but we can expand $\Theta(x, \lambda)$ and $R(x, \lambda)$ in powers of $\lambda^{\frac{1}{2}}$ and $\Theta(x, \lambda)$ starts with a term in $\lambda^{\frac{1}{2}}$. This is in agreement with equation (2.4) which for $\lambda = 0$ has the unique solution

$$\Theta(x, 0) \equiv 0. \tag{3.1}$$

For small positive values of λ, $y_0(x, \lambda)$ is a monotone increasing function f x such that $y_0(x, \lambda) < x$ and $y_0'(x, \lambda)$ tends to a positive limit < 1 as $x \to \infty$. ince

$$y_0'(x, \lambda) = 1 - \lambda \int_0^x \frac{y_0(s, \lambda)}{b(s)}\, ds,$$

e see that

$$\lim_{x \to \infty} y_0'(x, \lambda) > 0$$

t least for

$$\lambda \leqq \left\{ \int_0^\infty \frac{s\, ds}{b(s)} \right\}^{-1}. \tag{3.2}$$

or such values of λ we have $0 < \Theta(x, \lambda) < \frac{\pi}{2}$.

If λ keeps on increasing, we reach a value $\lambda = \lambda_0$ such that

$$\lim_{x \to \infty} y_0'(x, \lambda) = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} \Theta(x, \lambda) = \frac{\pi}{2}.$$

his is the first characteristic value and it exceeds the right member of (3.2). he corresponding characteristic function is positive for $0 < x$. For $\lambda = \lambda_0 + \delta$, $_0(x, \lambda)$ has a distant zero, $x_1(\lambda)$, as well as a positive maximum, both of hich move to the left when λ increases. There cannot be more than one ositive zero. This follows from

Lemma 3.1. *Let $\xi(\lambda)$ be chosen so that*

$$\omega(\xi(\lambda)) = 4\lambda. \tag{3.3}$$

hen the equation (1.1) is strictly non-oscillatory in the interval $[\xi(\lambda), \infty)$.

For if $\xi(\lambda) < x$, then

$$\lambda x \int_x^\infty \frac{ds}{b(s)} = \lambda x \int_x^\infty \frac{ds}{(s+1)^2 \omega(s)} < \frac{\lambda x}{(x+1)\omega(x)} < \frac{1}{4}$$

nd by [2], Corollary 1 on p. 246, the assertion holds.

This shows that $y_0(x, \lambda)$ can have at most one zero in $[\xi(\lambda), \infty)$. Thus f $y_0(x, \lambda_0 + \delta)$ is to have a second zero, it must be located in $(0, \xi(\lambda_0 + \delta))$ ut $y_0(x, \lambda)$ is uniformly continuous with respect to (x, λ) for $0 \leqq x \leqq \xi(\lambda_0 + \delta)$, $_0 - \delta \leqq \lambda \leqq \lambda_0 + \delta$, so that for a preassigned $\varepsilon > 0$ we can find an η such that

$$y_0(x, \lambda_0 + \delta) > y_0(x, \lambda_0) - \varepsilon, \quad \eta > \delta, \quad \xi(\lambda_0 + \delta) \geqq x \geqq 0.$$

his excludes the existence of a second zero on the interval in question.

Thus, for sufficiently small values of δ, $y_0(x, \lambda_0 + \delta)$ has just one positive ero $x_1(\lambda_0 + \delta)$ and beyond this zero we have $\pi < \Theta(x, \lambda_0 + \delta) < \frac{3\pi}{2}$ byLemma 2.2. s λ increases, we reach a stage where $x_1(\lambda) < \xi(\lambda)$ and a value of λ, $\lambda = \lambda_1$, uch that

$$\lim_{x \to \infty} y_0'(x, \lambda_1) = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} \Theta(x, \lambda_1) = \frac{3\pi}{2}.$$

This is the second characteristic value, $y_0(x, \lambda_1)$ has one positive zer $x_1(\lambda_1) < \xi(\lambda_1)$, and is negative beyond this value.

In this manner one shows the existence of a sequence of characteristi values λ_n such that

$$\lim_{x\to\infty} y_0'(x, \lambda_n) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \Theta(x, \lambda_n) = (n + \tfrac{1}{2})\pi, \tag{3.4}$$

where $n = 0, 1, 2, \ldots$. The characteristic function $y_0(x, \lambda_n)$ has exactly positive zeros and the last one of them satisfies

$$x_n(\lambda_n) < \xi(\lambda_n) = \omega^{-1}(4\lambda_n), \tag{3.5}$$

where $\omega^{-1}(\cdot)$ is the inverse of $\omega(\cdot)$.

We are now ready to prove Theorem 1. We go back to formula (2.7 which we rewrite as

$$\Theta(x, \lambda) = \lambda^{\frac{1}{2}} J(x) + S(x, \lambda) \tag{3.6}$$

with obvious notation. Here we set

$$\lambda = \lambda_n, \qquad x = x_n(\lambda_n)$$

and obtain

$$n\pi = \lambda_n^{\frac{1}{2}} J\big(x_n(\lambda_n)\big) + S\big(x_n(\lambda_n), \lambda_n\big), \tag{3.7}$$

where obviously

$$J\big(x_n(\lambda_n)\big) = J[1 + o(1)], \qquad |S\big(x_n(\lambda_n), \lambda_n\big)| \leqq \tfrac{1}{4} \log b\big(x_n(\lambda_n)\big).$$

To prove (1.8) we have merely to show that

$$\log b\big(x_n(\lambda_n)\big) = o(\lambda_n^{\frac{1}{2}})$$

as $n \to \infty$. Since (3.5) holds, it is sufficient to show that

$$\log b\big(\xi(\lambda_n)\big) = o(\lambda_n^{\frac{1}{2}}), \tag{3.8}$$

and this is proved as follows. Since $\omega(x)$ is increasing,

$$\int_1^x \frac{ds}{(s+1)\sqrt{\omega(s)}} > \frac{1}{\sqrt{\omega(x)}} \log \frac{x+1}{\sqrt{x}+1} > \frac{\log(x+1)}{3\sqrt{\omega(x)}} \qquad (x > 5 \tag{3.9}$$

and here the first member tends to zero as $x \to \infty$ because J is finite. I particular, for $x = \xi(\lambda_n)$ we see that

$$\lambda_n^{-\frac{1}{2}} \log[\xi(\lambda_n) + 1] \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{3.10}$$

But

$$\log b\big(\xi(\lambda_n)\big) = 2 \log[\xi(\lambda_n) + 1] + \log \omega\big(\xi(\lambda_n)\big),$$

where the last term equals $\log 4\lambda_n$. This proves (3.8) and hence also (1.8 and completes the proof of Theorem 1.

It is not difficult to elaborate the method so as to get an estimate of the remainder term in (1.8), but we shall not attempt to do so here.

4. The Fringe Case. We return to formula (3.7) where we now assume that $b(x)$ satisfies the conditions of Theorem 2. In this case $J(x_n(\lambda_n))$ becomes infinite with n and the problem of showing that the first term on the right still dominates the second is not as easy as in the case when J is finite. The case $p>1$ is slightly simpler than the case when $p=1$, but the latter is more interesting.

To simplify the formulas we write

$$x_n(\lambda_n) = x_n, \qquad \xi(\lambda_n) = \xi_n. \tag{4.1}$$

We start with

LEMMA 4.1. *If $\omega(x)$ is a feebly increasing function, then we can find a quantity ϱ_n which is greater than $\frac{1}{2}$ but tends to $\frac{1}{2}$ when n becomes infinite such that*

$$\omega(x_n) = \frac{\lambda_n}{\varrho_n^2}. \tag{4.2}$$

To prove this we choose a quantity $\varrho>\frac{1}{2}$, but as near to $\frac{1}{2}$ as we please. We then determine η_n such that

$$\omega(\eta_n) = \frac{\lambda_n}{\varrho^2}.$$

Here η_n is uniquely defined and $\eta_n<\xi_n$. For $0<x<\eta_n$ we have

$$\frac{\lambda_n}{b(x)} = \frac{\lambda_n}{(x+1)^2\omega(x)} > \frac{\lambda_n}{(x+1)^2\omega(\eta_n)} = \frac{\varrho^2}{(x+1)^2}. \tag{4.3}$$

The auxiliary differential equation

$$u'' + \frac{\varrho^2}{(x-1)^2}u = 0 \tag{4.4}$$

is oscillatory since $\varrho^2>\frac{1}{4}$. It has solutions of the form

$$(x+1)^{\frac{1}{2}}\sin\left[(\varrho^2-\tfrac{1}{4})^{\frac{1}{2}}\log(x+1)+a\right],$$

where a is any constant. In particular, there is a solution which has a zero at $x=\eta_n$ and the preceding zero of this solution is at

$$\zeta_n \equiv (\eta_n+1)\exp\left[-\pi(\varrho^2-\tfrac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}\right]-1. \tag{4.5}$$

By a classical comparison theorem due to STURM, the inequality (4.3) implies that every solution of (1.1) has a zero in the interval (ζ_n, η_n). In particular, $y_0(x, \lambda_n)$ must have this property. Thus we have

$$\zeta_n \leqq x_n, \qquad \omega(\zeta_n) \leqq \omega(x_n). \tag{4.6}$$

We now use the fact that $\omega(x)$ is supposed to be feebly increasing. This property is defined by (1.14). We observe that there exists a fixed quantity C,

$$C > \exp\left[\pi(\varrho^2-\tfrac{1}{4})^{-1}\right],$$

such that for all large n we have

$$\zeta_n < \eta_n < C\,\zeta_n.$$

Hence, for a given $\varepsilon > 0$, there exists an $N(\varepsilon, C)$ such that

$$\omega(\zeta_n) < \omega(\eta_n) < (1+\varepsilon)\,\omega(\zeta_n), \qquad N(\varepsilon, C) < n.$$

By (4.3) we then have

$$\frac{\lambda_n}{\varrho^2(1+\varepsilon)} < \omega(\zeta_n) < \frac{\lambda_n}{\varrho^2}.$$

Hence, for such values of n

$$\frac{\lambda_n}{\varrho^2(1+\varepsilon)} < \omega(x_n) < \omega(\xi_n) = 4\lambda_n.$$

It follows that we can find a ϱ_n such that

$$\omega(x_n) = \frac{\lambda_n}{\varrho_n^2}, \quad \frac{1}{2} < \varrho_n < \varrho(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}.$$

Since ϱ is as close to $\frac{1}{2}$ as we please, we see that ϱ_n has the properties stated in the lemma.

We now return to formula (3.7) which we rewrite as

$$n\pi = \lambda_n^{\frac{1}{2}} J(x_n) + S(x_n, \lambda_n). \tag{4.7}$$

By condition (vi), more precisely by (1.10), we have

$$J(x_n) = \gamma_n \frac{L_p(x_n)}{[\omega(x_n)]^{\frac{1}{2}}}, \tag{4.8}$$

where

$$\beta_p - \varepsilon < \gamma_n < \mu_p + \varepsilon$$

for large values of n. By Lemma 4.1 (4.7) becomes

$$n\pi = \gamma_n \varrho_n L_p(x_n) + S(x_n, \lambda_n). \tag{4.9}$$

Since

$$|S(x_n, \lambda_n)| < \tfrac{1}{2}\log(x_n + 1) + \tfrac{1}{4}\log 4\lambda_n, \tag{4.10}$$

we see that when $p > 1$ the term $L_p(x_n)$ clearly dominates $S(x_n, \lambda_n)$. Thus in this case we get

$$L_p(x_n) = \frac{\pi}{\gamma_n \varrho_n}(1+\delta_n)\,n \equiv \sigma_n n,$$

where $\delta_n \to 0$ as $n \to \infty$. Hence

$$x_n = L_p^{-1}(\sigma_n n), \qquad \omega(x_n) = \omega[L_p^{-1}(\sigma_n n)]$$

and by Lemma 4.1 finally

$$\lambda_n = \varrho_n^2\,\omega[L_p^{-1}(\sigma_n n)]$$

as asserted. Since $\varrho_n \to \frac{1}{2}$, we conclude that the limits of indetermination of σ_n satisfy (1.13).

For $p=1$ the situation is slightly more delicate for now the two terms in the right member of (4.9) may be very nearly equal. Since $L_1(x)=\log x$ we have

$$n\pi=\gamma_n\varrho_n\log x_n+S(x_n,\lambda_n).$$

In view of (4.10) we have

$$\log x_n=\sigma_n n,$$

where for large n

$$\pi(\gamma_n\varrho_n+\tfrac{1}{2}+\varepsilon)^{-1}<\sigma_n<\pi(\gamma_n\varrho_n-\tfrac{1}{2}-\varepsilon)^{-1}.$$

The limits of indetermination for σ_n then satisfy (1.12) instead. Since $\beta_1>1$ by assumption, σ_n is bounded away from 0 and ∞. The rest of the argument proceeds as above. Since

$$L_1^{-1}(u)=e^u,$$

the final result takes the simpler form

$$\lambda_n=\varrho_n^2\,\omega(e^{\sigma_n n}). \tag{4.11}$$

This completes the proof of Theorem 2.

As an illustration of the results we take the following three examples in which $\omega(x)$ has the values

(I) $[\log(x+e)]^2$,

(II) $[\log(x+e)]^\alpha$, $1<\alpha<2$,

(III) $\log(x+e)\,[\log_2(x+e^e)]^2$

respectively. The results are listed in the table below. Here τ is the exponent of convergence of the series $\sum\lambda_n^{-\sigma}$.

Table

Property	I	II	III
p	2	1	1
$\beta_p=\mu_p$	1	$\frac{2}{\alpha}$	2
λ_n	$\left(\varrho_n\sigma_n\frac{n}{\log n}\right)^2$	$\varrho_n^2\sigma_n^\alpha n^\alpha$	$\varrho_n^2\sigma_n n(\log\sigma_n n)^2$
$\liminf\sigma_n$	2π	$\geqq\frac{2\alpha\pi}{2+\alpha}$	$\geqq\frac{2}{3}\pi$
$\limsup\sigma_n$	2π	$\leqq\frac{2\alpha\pi}{2-\alpha}$	$\leqq 2\pi$
τ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\alpha}$	1

These results should be compared with these of [4], pp. 235 and 248. They show that the results previously obtained are of the right order of magnitude with respect to n and confirm various conjectures made by the author.

References

[1] HARTMAN, P.: On the zeros of solutions of second order linear differential equations. J. London Math. Soc. **27**, 492—496 (1952). — [2] HILLE, E.: Non-oscillation theorems. Trans. Amer. Math. Soc. **64**, 234—252 (1948). — [3] HILLE, E.: The abstract Cauchy problem and Cauchy's problem for parabolic differential equations. J. d'Analyse Mathématique **3**, 81—196 (1953/54). — [4] HILLE, E.: On a class of orthonormal functions. Rendiconti Seminario Mat. Univ. Padova **25**, 214—249 (1956). — [5] KAMKE, E.: Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1930. — [6] MOORE, R. A.: The behavior of linear differential equations of the second order. Pacific J. Math. **5**, 125—145 (1955). — [7] PRÜFER, H.: Neue Herleitung der Sturm-Liouvilleschen Reihenentwicklung stetiger Funktionen. Math. Annalen **95**, 499—518 (1926).

Dept. of Math., Yale University, New Haven, Conn. (U.S.A.)

(Eingegangen am 16. Februar 1959)

Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers

Von Dr. ERWIN MADELUNG, ord. Professor der Theoretischen Physik an der Universität Frankfurt a. M.

Sechste, revidierte Auflage. Mit 29 Textabbildungen. XX, 535 Seiten Gr.-8°. 1957.

Ganzleinen DM 49.70

(Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Band IV).

Aus den Besprechungen:

„Der erste Teil: *Mathematik* enthält die Abschnitte: Zahlen, Funktionen und Operatoren; Differential- und Integralrechnung; Reihen und Reihenentwicklungen; Funktionen; Algebra, Transformationen, Vektoranalysis; spezielle Koordinatensysteme; Gruppentheorie; Differentialgleichungen; Integralgleichungen; Variationsrechnung; Statistik (Wahrscheinlichkeitsrechnung). Der zweite Teil: *Physik* hat die Abschnitte: Mechanik, Elektrodynamik (einschl. Optik). Relativitätstheorie, Quantentheorie, Thermodynamik, statistische Methoden. Im Anhang in 21 Nummern Beispiele zu den 2 Teilen und nützliche Tabellen.

Viel Freude macht es, die kurzen Bemerkungen zu lesen, die Madelung voranstellt: Die Einleitung über die Aufgabe und die Methoden der mathematischen Physik, über das Begriffssystem der theoretischen Physik. Neu gegenüber früheren Auflagen ist der Abschnitt Zahlen, Funktionen und Operatoren im ersten Teil. Er enthält u. a eine Zusammenstellung über die δ-Funktion und über Spinoperatoren und Spinoren. Neugefaßt sind die Abschnitte Relativitätstheorie, Quantentheorie, Thermodynamik im zweiten Teil. In dem Abschnitt Relativitätstheorie wird in der Nummer „allgemeine Feldtheorie" eine kurze Zusammenstellung über den Zusammenhang zwischen LAGRANGE-Funktion, Feldgleichungen, Impuls-Energie-Erhaltungssatz, HAMILTON-Funktion gegeben. Im Abschnitt Quantentheorie wird vor allem das Begriffssystem und der Formelschatz der Wellenmechanik behandelt, dann die DIRACsche Theorie des Elektrons und die Strahlungstheorie mit besonderer Betonung der Quantentheorie der Strahlung.

Immer wieder fällt die eigenwillige, zum Nachdenken anregende, Formulierung allgemeiner Aussagen auf. Nach meiner Ansicht erreicht das Buch wirklich, was es vorhat: Für den Theoretiker das zu geben, was der KOHLRAUSCH für den Experimentalphysiker ist. Ich freue mich, das Buch zu besitzen."

Zeitschrift für angewandte Physik

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

NUMERISCHE MATHEMATIK

Unter Mitwirkung von

F. L. Bauer, Mainz, **L. Biermann,** München, **L. Collatz,** Hamburg, **G. Darmois,** Paris, **G. E. Forsythe,** Palo Alto, **A. Ghizzetti,** Rom, **W. Givens,** Detroit, **R. Inzinger,** Wien, **N. J. Lehmann,** Dresden, **E. J. Nyström,** Helsinki, **H. Piloty,** München, **R. D. Richtmyer,** New York, **A. van Wijngaarden,** Amsterdam, **J. H. Wilkinson,** Teddington.

Herausgegeben von

R. Sauer	**E. Stiefel**	**J. Todd**	**A. Walther**
München	Zürich	Pasadena	Darmstadt

Die Zeitschrift erscheint zwanglos in einzeln berechneten Heften

fünf Hefte bilden einen Band

Maximalbandpreis DM 100.—

Bisher sind erschienen:

1. Band, 1. Heft:	Mit 12 Abbildungen.	60 Seiten Gr.-8°.	1959.	DM 16.80
1. Band, 2. Heft:	Mit 11 Abbildungen.	60 Seiten Gr.-8°.	1959.	DM 16.80

Inhalt des zweiten Heftes:

Einschließen der Lösungen von Randwertaufgaben. Von L. Collatz und J. Schröder · Eine Fehlerabschätzung zum Einzelschrittverfahren bei linearen Gleichungssystemen. Von W. Dück · The radius of univalence of the error function. Von E. Kreyszig und J. Todd · Über die Anwendung von Binärmodellen in der Theorie der Charaktere der symmetrischen Gruppen. Von S. Comêt · Numerische Behandlung des Gelenkvierecks. Von A. Walther und H. Schappert.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG, Würzburg
Printed in Germany